

**А.Н. ДИЛИГЕНСКАЯ
И.А. ДАНИЛУШКИН**

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ
МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ
С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ
ПАРАМЕТРАМИ**

Учебно-методическое пособие

**Самара
Самарский государственный технический университет
2012**



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Автоматика и управление в технических системах»

А.Н. ДИЛИГЕНСКАЯ
И.А. ДАНИЛУШКИН

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ
МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ
С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ
ПАРАМЕТРАМИ

Учебно-методическое пособие

Самара
Самарский государственный технический университет
2012

Печатается по решению редакционно-издательского совета СамГТУ

УДК 517.956.4

Д 29

Дилигенская А.Н.

Д 29 Математическое моделирование систем с распределенными параметрами: учеб. пособие / *А.Н. Дилигенская, И.А. Данилушкин.* – Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2012. – 65 с.: ил.

Посвящено вопросам моделирования и исследования систем с распределёнными параметрами с помощью пакета прикладных программ для решения задач технических вычислений Matlab. Приведены общие сведения об объектах с распределёнными параметрами, краткие сведения из теории теплопроводности. Рассмотрена постановка краевых задач теплопроводности, типы граничных условий уравнений математической физики. Рассмотрена методика решения задач теплопроводности, приведены примеры решения задач, а также тексты программ на языке Matlab, реализующих расчёт температурных распределений.

Включены справочные материалы по преобразованию Лапласа.

Предназначено для студентов старших курсов, обучающихся по направлению 220200 «Автоматизация и управление» по специальности 220201 «Управление и информатика в технических системах». Частично освещает курс по дисциплине «Управление системами с распределёнными параметрами».

УДК 517.956.4

Д 29

Рецензент д-р техн. наук, проф. *Э.Я. Рапопорт*

© А.Н. Дилигенская,
И.А. Данилушкин, 2012
© Самарский государственный
технический университет, 2012

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемое читателю учебно-методическое пособие иллюстрирует методику решения задач теплопроводности операционным методом, а также реализацию алгоритмов расчёта температурных полей на языке Matlab. В отличие от академических монографий по теории теплопроводности, данное пособие содержит подробное изложение математических преобразований, ориентированное на уровень знаний студентов старших курсов технических специальностей без специальной математической подготовки.

В первой главе приведены теоретические сведения в объёме, необходимом для понимания исследуемой проблематики. Даны необходимые пояснения по постановке краевых задач теплопроводности.

Во второй главе изложена общая методика решения краевых задач теплопроводности операционным методом, приведены примеры решения задач.

В пособии приведены тексты программ на языке Matlab, которые могут использоваться студентами заочной формы обучения в качестве основы при выполнении контрольной работы по дисциплине «Управление системами с распределёнными параметрами». Задания к контрольной работе включены в состав учебного пособия.

ВВЕДЕНИЕ

При исследовании динамических систем достаточно часто пренебрегают их размерами, считая, что речь идёт о некоторых материальных точках, обладающих определёнными физическими свойствами, но не имеющих геометрических размеров. В то же время, существует широкий класс объектов, для которых такое пренебрежение приводит к качественно неверным результатам моделирования. Изучение подобных объектов – с распределёнными параметрами – должно осуществляться с учётом их пространственной протяженности.

Решение задачи моделирования объекта с распределёнными параметрами, адекватно описывающего поведение функции состояния пространственно протяженного объекта, лежит в основе последующего синтеза системы управления таким объектом. Существуют различные подходы к построению математических моделей объектов с распределёнными параметрами, среди которых можно выделить следующие способы описания поведения объекта:

- с помощью дифференциальных уравнений в частных производных, математически формализующих основные законы сохранения вещества и энергии в элементарном объёме [1–4];
- с помощью линейных интегральных преобразований, ядра которых отражают внутренние свойства объекта по отношению к действующим на объект внешним воздействиям [2, 3, 5, 6];
- на основе структурной теории распределённых систем [5, 7, 8], позволяющей с помощью передаточных функций типовых объектов с распределёнными параметрами получить структуру сложного объекта или системы;
- с помощью модального представления в виде разложения функции состояния в бесконечный ряд по собственным функциям, определяемым внутренней структурой объекта с соответствующими коэффициентами [3, 4, 6];
- методами приближённого моделирования путём упрощённого представления самих исходных дифференциальных уравнений объекта, или основанных на приближённом представлении точных решений уравнений в частных производных [5, 9];
- и другие.

В данном учебном пособии затрагивается лишь малая часть обширной проблемы моделирования ОРП, основанная на решении одного из видов уравнений математической физики – уравнения теплопроводности (Фурье). Методы решения краевых задач преподносятся с практической инженерной точки зрения, основной акцент делается на физической сущности преобразований. Строгого математического

обоснования используемых методов и применяемых приемов не приводится. Показано как правильно сформулировать математическую постановку краевой задачи для тел стандартной (канонической) формы. Приведён способ решения краевой задачи на основе операционного метода, а также программная реализация полученного решения в среде программирования Matlab, получены и проанализированы основные зависимости, отражающие поведение выходной величины – функции состояния объекта (температурного поля) во времени и в пространстве при заданном граничном управлении.

Приведен ряд вариантов для самостоятельного моделирования температурного поля при различных управляющих воздействиях по граничным условиям.

1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ ОБ ОБЪЕКТАХ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

1.1. ПРИНЦИПИАЛЬНЫЕ ОСОБЕННОСТИ ОБЪЕКТОВ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Поведение во времени типовых объектов, рассматриваемых в «классической» теории автоматического управления, характеризуется совокупностью конечного числа величин, и их описание в той или иной мере строится на системе конечного числа обыкновенных дифференциальных уравнений. Подобные объекты называются объектами с сосредоточенными параметрами, а системы управления ими – системами с сосредоточенными параметрами.

Описание таких объектов не учитывает влияние пространственной протяжённости в пределах конечных геометрических размеров рассматриваемого объекта на его характеристики. Во многих распространённых на практике случаях объекты могут быть отнесены к классу объектов с сосредоточенными параметрами при сохранности адекватности описания их качественных свойств.

В то же время существует класс объектов, которые принципиально не могут быть отнесены к объектам с сосредоточенными парамет-

рами без потери их качественных особенностей. Это объекты, характеристики которых зависят не только от времени, но и от пространственных координат, изменяющихся в пределах области, заданной геометрическими размерами тела.

К таким объектам относится большое число реальных технологических процессов, поведение которых основывается на действии физических полей различной природы (температурных, электромагнитных полей, полей потенциалов, концентраций и т.д.).

В этом случае принято говорить не о некотором векторе управляемых величин, зависящих от одной переменной – времени t , а о некоторой функции состояния, зависящей и от времени и от пространственных координат. Полное описание объекта требует знания поведения его функции состояния во всей заданной пространственной области объекта. Т.е. необходимо рассматривать бесконечное число управляемых величин, каждая из которых характеризует поведение объекта в некоторой фиксированной точке.

В настоящее время большое число актуальных практических задач управления различными физическими процессами из области теплопроводности, гидродинамики, акустики, электродинамики, диффузии и т.д. решается на основе математического аппарата теории управления объектами с распределёнными параметрами. В данном учебном пособии рассматриваются задачи получения математического описания объекта с распределёнными параметрами на примере процессов переноса тепла [1].

1.2. ТИПОВЫЕ ОБЪЕКТЫ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ ВТОРОГО ПОРЯДКА, ОПИСЫВАЕМЫЕ УРАВНЕНИЕМ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Изучение процесса теплопроводности, т.е. процесса передачи тепла от одной части тела к другой или от одного тела к другому, находящемуся в соприкосновении с первым, по своей сущности требует применения специального математического аппарата.

Процесс теплопередачи, как и всякое физическое явление, протекает во времени и в пространстве и характеризуется (в общем случае) нестационарной пространственно-временной функцией температуры $f(x, y, z, t)$, где x, y, z – пространственные координаты в декартовой системе, t – время.

Совокупность значений температуры по всему объему рассматриваемого тела в отдельный момент времени называется температурным полем. В теории теплопроводности различают стационарное и нестационарное температурное поле.

Стационарное температурное поле – это такое поле, температура которого в любой точке объема не изменяется во времени, а является функцией только пространственных координат. Такое поведение свойственно установившемуся режиму.

Нестационарное температурное поле – это поле, температура которого изменяется не только в пространстве, но и с течением времени, и является функцией, как пространственных координат, так и времени. Такое поведение описывает неустановившееся состояние, переходный режим.

В общем случае, температурное поле $T = T(x, y, z, t)$, соответствующее уравнению

$$T(x, y, z, t) = f(x, y, z, t) \quad (1)$$

является пространственно распределённым (трёхмерным).

Описание процесса теплопроводности, как и многих других физических процессов, может быть осуществлено на основе дифференциальных уравнений в частных производных, называемых уравнениями математической физики.

Процесс распространения тепла в однородном изотропном¹ теле описывается уравнением теплопроводности, задающим зависимость между температурой, временем и координатами бесконечно малого объёма.

¹ *Изотропный материал* имеет одинаковые физические свойства во всех направлениях.

В типичной ситуации рассматривается нестационарный процесс теплопередачи в твердом теле, осуществляющийся по нормали к изотермическим² поверхностям, а теплофизические коэффициенты считаются независимыми от координат и времени. Температура в каждой точке тела $M(x, y, z)$ в любой момент времени t определяется функцией $T = T(x, y, z, t)$.

Такой процесс описывается дифференциальным уравнением в частных производных второго порядка – так называемым уравнением теплопроводности или уравнением Фурье

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\Delta T, \quad (2)$$

где a – коэффициент температуропроводности, который зависит от физических свойств материала, а выражение

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (3)$$

является оператором Лапласа в декартовой системе координат для трёхмерной пространственной области определения температурного поля (1). В упрощённых частных случаях, при возможности пренебречь распространением тепла по одной или двум координатам, рассматривается двумерное или одномерное поле соответственно.

В уравнении теплопроводности (2) коэффициент температуропроводности при постоянном объеме тела вычисляется как

$$a = \frac{\lambda}{c\rho}, \left[\frac{m}{c^2} \right] \quad (4)$$

на основе теплофизических характеристик нагреваемого металла:

λ , $\left[\frac{Вт}{м \cdot ^\circ C} \right]$ – коэффициента теплопроводности;

ρ , $\left[\frac{кг}{м^3} \right]$ – плотности;

² *Изотермическая поверхность* содержит все точки поля с одинаковой температурой.

$c, \left[\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot ^\circ\text{C}} \right]$ – удельной теплоёмкости.

По своему физическому смыслу коэффициент a характеризует перенос внутренней энергии тела и является коэффициентом пропорциональности между плотностью потока тепла и градиентом объёмной концентрации внутренней энергии тела. Он численно равен количеству тепла, протекающего в единицу времени через единицу поверхности, при перепаде объёмной концентрации внутренней энергии в 1 Дж/м^3 на единицу длины нормали.

Во многих тепловых процессах внутри тела могут действовать источники тепла, которые могут быть положительными и отрицательными. В данном учебном пособии задачи на исследование процессов теплопередачи в телах с внутренними источниками не рассматриваются. Дополнительную информацию по этой тематике можно найти в литературе [1, 10].

В дальнейшем будем рассматривать нестационарное одномерное температурное поле (тепло распространяется в одном направлении, например в направлении оси x), без внутренних источников тепла, которое описывается уравнением

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \quad (5)$$

Ситуация, когда при моделировании распространения тепла учитывается только одна координата, вообще говоря, возникает в двух случаях:

1. При рассмотрении процесса передачи тепла по длине бесконечно тонкого стержня с теплоизолированной боковой поверхностью. Теплоизоляция подразумевает, что отток/приток тепла с боковой поверхности отсутствует (рис. 1, a), а отсутствие толщины стержня делает бессмысленным использование координат y и z . На практике толщиной стержня пренебрегают, если его длина в десять и более раз больше толщины.

2. При рассмотрении процесса передачи тепла по толщине пластины, которая, в математически строгом определении принимается бесконечной по ширине и высоте (неограниченная пластина). На практике же, достаточно того, чтобы ширина и высота пластины были в десять и более раз больше толщины (рис. 1, б). В этом случае температуры в соседних точках, лежащих на некоторой плоскости $x = \xi$, т.е. с одинаковым значением координаты x , но с разными значениями координат y и z , будут одинаковы, а, значит, перепад температуры между ними будет равен нулю, т.е. $\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{x=\xi} = \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{x=\xi} = 0$. А, следовательно, и вторые производные $\left. \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right|_{x=\xi}$, $\left. \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right|_{x=\xi}$ будут равны нулю, таким образом, оператор Лапласа (3) вырождается до $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$.

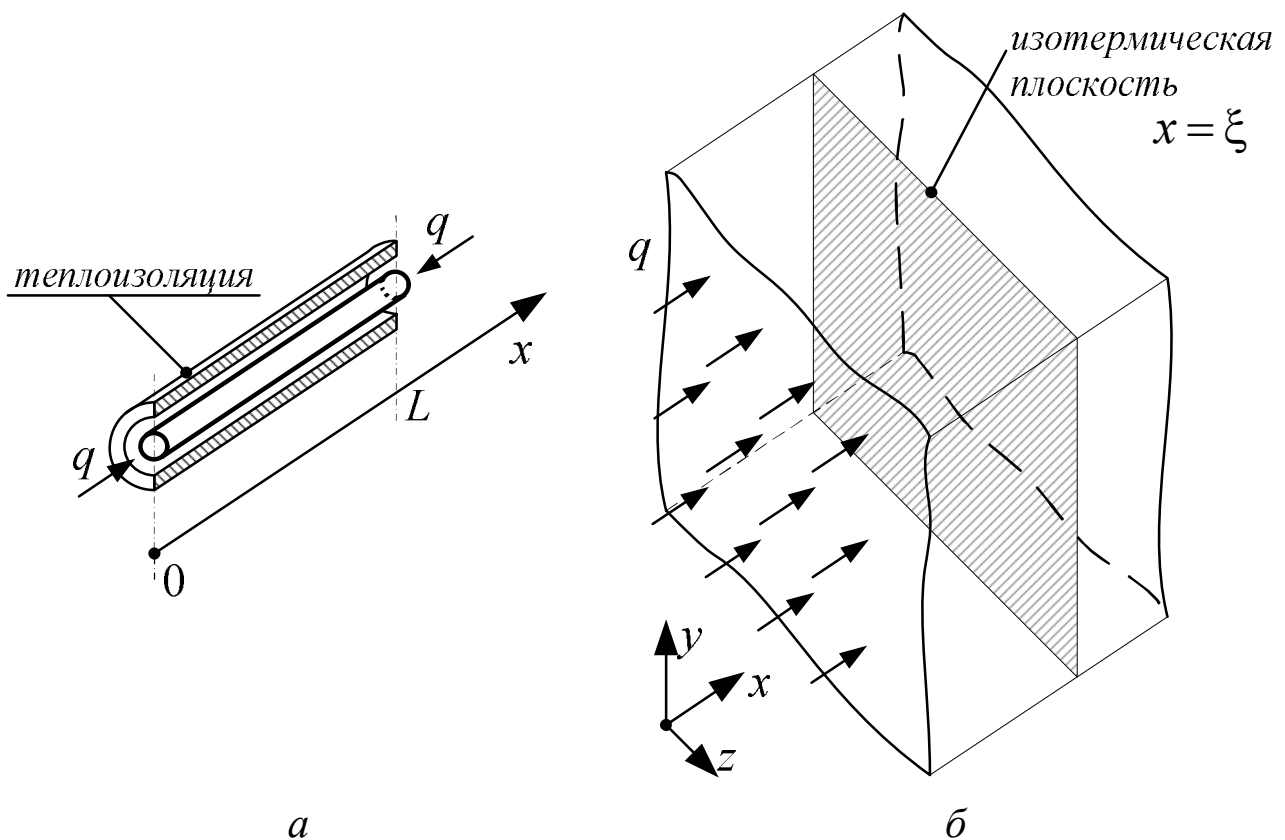


Рис. 1. Одномерная тепловая задача:
 q – тепловой поток на границе, влияющий на температурное поле тела

Уравнение теплопроводности (5) устанавливает связь между временными и пространственными изменениями температуры тела, т.е. математически описывает процесс передачи тепла внутри тела.

Такое уравнение имеет бесчисленное множество решений. Для решения конкретной физической задачи, расчёт температурного поля тела в любой момент времени, сформулированное уравнение должно удовлетворять некоторым дополнительным условиям однозначности определения его решений. Такими условиями являются начальное и граничные условия.

Совокупность начального и граничных условий называется краевыми условиями, а соответствующая задача, содержащая уравнение теплопроводности, начальное и граничные условия, – краевой задачей.

Начальное условие задает распределение температур в начальный момент времени

$$T(x, t)|_{t=0} = T(x, 0) = f_0(x). \quad (6)$$

Во многих задачах начальное распределение принимается равномерным, т.е.

$$T(x, t)|_{t=0} = T(x, 0) = f_0 = const. \quad (7)$$

Граничные условия формулируются в виде закона взаимодействия данного тела с окружающей средой. В случае процесса теплообмена без внутренних источников тепла граничные условия исполняют роль управляющих воздействий, т.е. являются причиной изменения температурного распределения в рассматриваемом теле. В этом случае говорят о внешнем теплообмене (газовые печи, электрические печи сопротивления). В зависимости от способа задания температурного режима на границах тела, граничные условия могут быть различными. Рассмотрим основные типы граничных условий.

1.3. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Наиболее общий и наиболее сложный способ задания граничных условий описывает теплообмен между поверхностью твердого тела и окружающей средой – газом или жидкостью. Например, воздух на-

гревается от батареи отопления, его плотность уменьшается и он устремляется вверх, а на его смену приходят новые потоки холодного воздуха. Таким образом, возникает движение масс воздуха (конвекция), в результате чего батарея омывается всё новыми и новыми потоками. При этом количество тепла, отданного батареей на нагрев воздуха, зависит от разницы температур воздуха и поверхности самой батареи. Другой пример – принудительный обдув радиатора в системе охлаждения процессора.

Подобный теплообмен встречается повсеместно и называется конвективным теплообменом. Он также имеет место и при нагреве холодного тела потоком газа или жидкости более высокой температуры.

Закон конвективного теплообмена может быть упрощённо описан в виде закона Ньютона [1]: количество тепла, передаваемого в единицу времени на единицу поверхности тела (тепловой поток $q(t)$) от окружающей среды с температурой $T_C(t)$ в процессе нагрева прямо пропорционально разности температур между поверхностью тела и окружающей средой:

$$q(t) = \alpha [T_C(t) - T_\Gamma(t)], \quad (8)$$

где α , $\left[\frac{Вт}{м^2 \cdot ^\circ C} \right]$ – коэффициент теплоотдачи, или коэффициент теплообмена, численно равен количеству тепла, отдаваемого (или получаемого) единицей площади поверхности тела в единицу времени при разности температур между поверхностью тела и окружающей средой в $1^\circ C$;

$T_\Gamma(t)$ – температура поверхности тела³;

Γ – граница тела.

Физический смысл выражения (8) заключается в том, что чем больше разность температур между окружающей средой и темпера-

³ Символ Γ в индексе обозначает, что существует некоторая поверхность Γ , заданная произвольным образом, являющаяся границей твердого тела и, если точка принадлежит ей, то это граничная точка.

турой поверхности тела, тем быстрее идёт нагрев. С уменьшением разности температур в процессе нагрева, скорость нагрева становится всё ниже и ниже. При равных температурах нагрев вообще не происходит. Таким образом, соблюдается главное и очевидное условие: при конвективном теплообмене тело не может нагреться выше температуры окружающей среды.

Тепловой поток через поверхность внутрь тела при нагреве равен произведению коэффициента теплопроводности λ и производной по направлению вектора нормали \bar{n} к поверхности тела: $\lambda \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial \bar{n}} \right)_{\Gamma}$.

$$\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial \bar{n}} \right)_{\Gamma} = \alpha(T_C(t) - T_{\Gamma}(t)), \quad t \in (0, \infty). \quad (9)$$

Иногда выражение (8) может быть записано иначе:

$$\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial \bar{n}} \right)_{\Gamma} = \alpha(T_C(t) - T(M, t)), \quad M \in \Gamma, \quad t \in (0, \infty),$$

но его суть от этого не меняется.

В случае, когда рассматривается температурное поле тела канонической формы (пластина, цилиндр, шар), вектор нормали поверхности совпадает, либо противоположен по направлению с одной из осей системы координат, в которых это тело описывается. Тогда можно от производной по направлению вектора нормали перейти к производной по пространственной координате. Для одномерного случая (рис. 1) граница тела определяется, фактически, двумя плоскостями: при $x = 0$ и при $x = L$. При этом на левой границе ($x = 0$) вектор нормали к поверхности будет направлен противоположно к оси Ox . А на правой границе ($x = L$) – сонаправлен с осью Ox . Здесь L – длина нагреваемого стержня или толщина бесконечной пластины. Тогда граничное условие (9) записывается следующим образом:

$$-\lambda \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = \alpha(T_C(t) - T(0, t)), \quad t \in (0, \infty); \quad (10)$$

$$\lambda \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=L} = \alpha(T_C(t) - T(L, t)), \quad t \in (0, \infty). \quad (11)$$

Знак минус в (10) появляется как раз из-за того, что вектор нормали на левой границе ($x = 0$) направлен в противоположную оси Ox сторону.

Такой способ задания граничных условий называется в литературе *граничными условиями третьего рода* (ГУЗ) [1]. Этот способ является наиболее приближенным к реальной ситуации, но, одновременно, и наиболее сложным для поиска аналитического решения. Более простые случаи (граничные условия первого и второго рода) являются частными случаями ГУЗ и речь о них пойдёт ниже.

Краевая задача теплопроводности третьего рода для стержня длины L записывается в следующем виде:

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}, \quad x \in (0, L), \quad t \in (0, \infty); \quad (12)$$

$$T(x,t)|_{t=0} = f_0(x), \quad x \in [0, L]; \quad (13)$$

$$-\lambda \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = \alpha(T_C(t) - T(0,t)), \quad t \in (0, \infty); \quad (14)$$

$$\lambda \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=L} = \alpha(T_C(t) - T(L,t)), \quad t \in (0, \infty). \quad (15)$$

Если в задаче (12)-(15) принять, что отношение $\frac{\lambda}{\alpha} \rightarrow 0$ (например, если коэффициент теплообмена очень велик), то левые части уравнений (14)-(15) станут равны нулю:

$$0 = -\frac{\lambda}{\alpha} \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = T_C(t) - T(0,t), \quad t \in (0, \infty); \quad (14a)$$

$$0 = \frac{\lambda}{\alpha} \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=L} = T_C(t) - T(L,t), \quad t \in (0, \infty), \quad (15a)$$

и тогда граничные условия будут определять непосредственно температуру тела на границе. Такие граничные условия называются *граничными условиями первого рода* (ГУ1).

Краевая задача теплопроводности первого рода для стержня длины L , с теплоизолированной боковой поверхностью, при заданных законах изменения температуры на границах стержня, имеет вид

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}, \quad x \in (0,L), \quad t \in (0,\infty); \quad (16)$$

$$T(x,t)|_{t=0} = f_0(x), \quad x \in [0,L]; \quad (17)$$

$$T(0,t) = f_1(t), \quad t \in (0,\infty); \quad (18)$$

$$T(L,t) = f_2(t), \quad t \in (0,\infty). \quad (19)$$

Простейший частный случай граничных условий первого рода – температура на поверхности тела поддерживается постоянной на протяжении всего процесса теплообмена, т.е. $T(M,t) = f(t) = const$, $M \in \Gamma$. Такая ситуация может возникать при теплообмене по закону Ньютона между телом с бесконечно большим коэффициентом теплообмена и окружающей средой с постоянной температурой $T_C(t) = const$ или может осуществляться при помощи специальных устройств, искусственно поддерживающих постоянную температуру на поверхности тела [1].

На практике такая ситуация не встречается, однако аналитическое решение краевой задачи с ГУ1 находится гораздо проще, чем при остальных ГУ, поэтому в ряде случаев, когда имеется возможность пренебречь неточностью описания граничных условий, используется упрощенная постановка задачи моделирования с ГУ1.

Граничное условие второго рода (ГУ2) возникает в высокотемпературных печах при теплопередаче излучением, когда требуемая температура изделия значительно меньше температуры излучающих поверхностей, и влиянием температуры поверхности нагреваемого тела на величину внешнего теплового потока (конвективной теплопередачей) можно пренебречь. Поверхность нагреваемого тела поглощает тепловой поток от излучающих его нагретых стен и свода печи.

Граничное условие второго рода можно получить из ГУ3, если принять, что влияние температуры поверхности нагреваемого тела на поток тепла несущественно, т.е. в (14)–(15) принять, что

$$-\lambda \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = q_1(t), \quad t \in (0, \infty); \quad (14б)$$

$$\lambda \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=L} = q_2(t), \quad t \in (0, \infty). \quad (15б)$$

Для стержня длины L краевая задача теплопроводности второго рода запишется в следующем виде

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}, \quad x \in (0, L), \quad t \in (0, \infty); \quad (20)$$

$$T(x,t) \Big|_{t=0} = f_0(x), \quad x \in [0, L]; \quad (21)$$

$$-\lambda \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = q_1(t), \quad t \in (0, \infty); \quad (22)$$

$$\lambda \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=L} = q_2(t), \quad t \in (0, \infty). \quad (23)$$

В простейшем частном случае граничных условий второго рода тепловой поток является постоянной величиной. Такая ситуация возникает, когда все источники излучения можно заменить на один, характеризующийся некоторой средней температурой. Если температура поверхности тела значительно меньше средней температуры печи, тепловой поток может считаться постоянным.

Граничное условие четвертого рода соответствует теплообмену соприкасающихся твердых тел, когда температура тел в месте контакта одинакова, или конвективному теплообмену тела с жидкостью.

В этих случаях соотношение равенства температур

$$T_1(M, t) \Big|_{\Gamma} = T_2(M, t) \Big|_{\Gamma}, \quad t \in (0, \infty) \quad (24)$$

дополняется соотношением равенства тепловых потоков в области прикосновения

$$\lambda_1 \left(\frac{\partial T_1}{\partial n} \right) \Big|_{\Gamma} = \lambda_2 \left(\frac{\partial T_2}{\partial n} \right) \Big|_{\Gamma}, \quad t \in (0, \infty), \quad (25)$$

где Γ – поверхность соприкосновения тел;

$T_1 = T_1(x, y, z, t) = T_1(M, t)$ – температура первого тела;

$T_2 = T_2(x, y, z, t) = T_2(M, t)$ – температура второго тела.

Таким образом, при существенно нестационарном конвективном теплообмене для точного решения задачи необходимо использовать граничные условия четвертого рода. В то же время в большинстве практических случаев достаточно использовать граничные условия третьего рода, дающие, хотя и приближенный, но достаточный результат.

Рассмотренные типы граничных условий охватывают реальные процессы теплообмена. Иногда граничные условия на разных частях границы задаются по-разному. В этом случае возникает смешанная краевая задача.

Самый распространённый случай возникновения смешанной краевой задачи – учёт условия симметрии. Например, при нагреве стержня (ГУЗ) при одинаковых условиях на обеих границах и нулевых начальных условиях, температурное поле будет вести себя симметрично относительно центра стержня. Тогда можно решить смешанную краевую задачу для стержня половинной длины с ГУЗ на одной границе и нулевыми ГУ2 на второй, а полученное решение затем отобразить относительно центра симметрии. Вот как будет выглядеть постановка смешанной задачи в описанном случае:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} &= a \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}, \quad x \in (0, L/2), \quad t \in (0, \infty); \\ T(x,t)|_{t=0} &= 0, \quad x \in [0, L/2]; \\ -\lambda \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=0} &= \alpha(T_C(t) - T(0,t)), \quad t \in (0, \infty); \\ \lambda \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=L/2} &= 0, \quad t \in (0, \infty). \end{aligned}$$

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. В чём принципиальное отличие объектов с распределёнными параметрами от объектов с сосредоточенными параметрами?
2. Что называют температурным полем? Что такое стационарное температурное поле, нестационарное температурное поле?

3. Дайте определение оператору Лапласа.
4. Какой физический смысл имеет коэффициент температуропроводности?
5. Дайте определение понятию «начальные условия».
6. Перечислите виды граничных условий.

7. Граничными условиями какого рода вы описали бы нагрев поверхности песчаного пляжа в солнечный день? Почему, каким бы ярким ни было солнце, песок не нагревается выше 80°C даже в пустыне?

8. Какой род граничных условий нужно использовать для описания процесса охлаждения поверхности пляжа воздухом? Какой род граничных условий нужно использовать для описания процесса теплопередачи между поверхностью пляжа и телами загорающих?

9. Два тела одинаковой формы и размера, одинаковой плотности и теплоёмкости, но с разными коэффициентами теплопередачи нагреваются в одной печи в одинаковых условиях. У какого тела средняя температура, после часа нагрева будет выше? Почему?

2. МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБЪЕКТОВ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

2.1. МЕТОДИКА МОДЕЛИРОВАНИЯ ОБЪЕКТОВ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Исследованию задач математической физики и методам их решения посвящено множество работ [2, 3, 4].

Классические методы решения уравнений математической физики состоят в том, что находится совокупность частных решений, удовлетворяющих дифференциальному уравнению и граничным условиям, после чего на основании принципа наложения составляется сумма найденных частных решений, коэффициенты которых определяются из начального условия.

Наиболее распространенным из классических методов является метод разделения переменных. Классические методы не всегда удобны для практического применения [1], поэтому рассматриваться не будут.

Более эффективными и универсальными являются методы интегральных преобразований, которые разделяются на методы конечных интегральных преобразований и операционные методы [2, 3, 5]. Основное удобство интегральных преобразований состоит в исключении пространственных или временных производных в уравнениях объекта в пространстве изображений, и замене операций дифференцирования по пространственным координатам или во времени на соответствующие алгебраические операции в уравнениях для изображений.

Исследование задач с конечной областью изменения пространственных переменных обусловили развитие методов конечных интегральных преобразований, идея которых состоит в применении интегрального преобразования по пространственной координате. При исследовании объектов стандартной геометрической формы в качестве ядер интегральных преобразований используются синус- и косинус-преобразования Фурье, преобразования Ханкеля и другие [11, 12].

Универсальным методом решения задач математической физики является операционный метод (метод интегрального преобразования Лапласа) [1, 7, 13], и далее решение задачи теплопроводности будет осуществляться с помощью этого метода.

Метод преобразования Лапласа состоит в том, что решение ищется не для самой функции времени (оригинала) $f(t)$, а для её изображения $\bar{f}(p)$. Переход к изображению осуществляется при помощи интегрального преобразования Лапласа относительно переменной t :

$$\bar{f}(p) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-pt} dt = L\{f(t)\}, \quad (26)$$

где p – комплексное число (параметр Лапласа).

Когда найдено решение задачи в изображениях, остаётся определить его оригинал, что выполняется с помощью обратного преобразования Лапласа в общем случае по формуле обращения

$$f(t) = L^{-1}\{\bar{f}(p)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} \bar{f}(p) \cdot e^{pt} dp. \quad (27)$$

Контурное интегрирование (27), проходящее в комплексной плоскости $p = \xi + j\eta$ вдоль прямой $\sigma = const$, параллельной мнимой оси, осуществляется методами теории функций комплексного переменного [14, 15], и в общем случае является самостоятельной сложной задачей.

В большинстве случаев, к которым относятся подавляющее количество типовых объектов, обратное преобразование Лапласа может быть выполнено на основе таблиц стандартных изображений (см. Приложение 2).

Если изображение $\bar{f}(p)$ представляет собой отношение двух целых трансцендентных функций (обобщённых полиномов параметра p), и при этом полином знаменателя не содержит слагаемого с нулевой степенью параметра p

$$\bar{f}(p) = \frac{\varphi(p)}{\psi(p)} = \frac{a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots}{b_1 p + b_2 p^2 + \dots}, \quad (28)$$

то по теореме разложения оригинал функции может быть определён как [1, 14]

$$f(t) = L^{-1} \left\{ \frac{\varphi(p)}{\psi(p)} \right\} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(p_n)}{\psi'(p_n)} \cdot e^{p_n t}, \quad (29)$$

где p_n – простые корни функции $\psi(p)$.

Если изображение $\bar{f}(p)$ представляет отношение двух полиномов, причём степень полинома числителя $\varphi(p)$ меньше степени полинома знаменателя $\psi(p)$ и полином $\psi(p)$ имеет корни кратности k в точках p_m , то в этом случае теорема разложения имеет вид [1, 14]

$$f(t) = L^{-1} \left\{ \frac{\varphi(p)}{\psi(p)} \right\} = \sum_m \frac{1}{(k-1)!} \cdot \lim_{p \rightarrow p_m} \left\{ \frac{d^{k-1}}{dp^{k-1}} \left[\frac{\varphi(p)(p-p_m)^k}{\psi(p)} \cdot e^{pt} \right] \right\}, \quad (30)$$

где сумма берётся по всем корням $\bar{f}(p)$.

Следует отметить, что наибольшая трудность в решении уравнения теплопроводности при различных краевых условиях состоит в нахождении оригинала по полученному изображению $\bar{T}(x, p)$. Для

большинства типовых объектов оказывается достаточным использование таблиц изображений соответствующих функций или теоремы разложения (в случае простых или кратных корней).

На основании изложенного, может быть предложена следующая методика решения краевых задач:

1. Выполняется преобразование Лапласа (26) по времени к дифференциальному уравнению теплопроводности (5)

$$L\left\{\frac{\partial T(x,t)}{\partial t}\right\} = L\left\{a\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}\right\}, \quad (31)$$

где изображение температурного поля определяется как

$$\bar{T}(x,p) = L\{T(x,t)\} = \int_0^{\infty} T(x,t) \cdot e^{-pt} dt. \quad (32)$$

В результате (31) получается неоднородное (при произвольных начальных условиях) обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами относительно изображения $\bar{T}(x,p)$

$$p\bar{T}(x,p) - T(x,0) = a\frac{d^2\bar{T}(x,p)}{dx^2}. \quad (33)$$

2. Находится общее решение полученного неоднородного дифференциального уравнения (33) в пространстве изображений $\bar{T}(x,p)$ (методика решения дифференциальных уравнений второго и высших порядков изучается в курсе математического анализа [14]).

Общее решение неоднородного уравнения является суммой общего решения соответствующего однородного уравнения и некоторого частного решения неоднородного.

2.1. Для нахождения общего решения однородного дифференциального уравнения [14, 16] второго (или высшего) порядка на основании замены $\frac{d^n \bar{T}(x,p)}{dx^n} \rightarrow r^n$ составляется характеристическое алгебраическое уравнение (в рассматриваемом случае квадратное уравнение). Каждому корню соответствует своё решение, линейная комби-

нация этих решений с произвольными постоянными C_1 и C_2 является общим решением однородного уравнения.

2.2. Находится частное решение неоднородного уравнения, соответствующее правой части неоднородного уравнения методом вариации постоянных или методом Коши [14, 16]. Если правая часть уравнения имеет специальный вид (что встречается достаточно часто), решение может быть найдено простыми алгебраическими приёмами.

2.3. Записывается общее решение неоднородного уравнения, как сумма общего решения однородного уравнения и полученного частного решения неоднородного. Результат будет содержать две неизвестные C_1 и C_2 .

3. Определяется частное решение неоднородного дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданным граничным условиям.

Для этого с помощью преобразования Лапласа граничные условия переводятся в пространство изображений, откуда в результате совместного решения двух полученных уравнений находятся значения C_1 и C_2 .

4. При помощи таблицы обратных преобразований Лапласа или теоремы разложения находится оригинал решения $T(x, t)$.

2.2. ПРИМЕРЫ ПОСТРОЕНИЯ МОДЕЛЕЙ ОБЪЕКТОВ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Задача 1. Нагрев полубесконечного тела

Под одномерным полубесконечным телом понимается тонкий стержень с теплоизолированной боковой поверхностью или неограниченная пластина (см. рис. 1), которые с одной стороны ограничиваются плоскостью, а с другой – продолжаются в бесконечность.

С практической точки зрения, такая постановка задачи может применяться при исследовании процессов интенсивного нагрева поверхности тела, например, в процессе закалки. Поскольку при исследовании подобных процессов интерес представляет температурное распределение на небольшом расстоянии от поверхности, то массив-

ное тело можно принять полубесконечным. Пример: требуется смоделировать температурное распределение на глубине от 0 до 5 мм при общей толщине тела 10 см.

Постановка задачи

Дан полуограниченный стальной стержень при температуре T_0 с теплоизолированной боковой поверхностью. Граница стержня $x = \infty$ теплоизолирована, на другой границе $x = 0$ задан постоянный тепловой поток $q(t) = q_c$ (ГУ2). Найти температуру стержня, построить график зависимости температуры стержня от времени в нескольких точках по объему тела $x \in [0, 0.1]$ м.

Исходные данные:

$$T_0 = 20^{\circ}C; q_c = 65 \text{ кВт} / \text{м}^2.$$

Теплофизические характеристики стали:

$$\lambda = 47 \left[\frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot ^{\circ}\text{C}} \right], c = 462 \left[\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot ^{\circ}\text{C}} \right], \rho = 7800 \left[\frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \right].$$

Решение

Запишем математическую модель рассматриваемого объекта. Одномерное дифференциальное уравнение теплопроводности имеет вид

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}, \quad x \in (0, \infty), \quad t \in (0, \infty) \quad (34)$$

с соответствующими начальным

$$T(x,t)|_{t=0} = T_0, \quad x \in (0, \infty) \quad (35)$$

и граничными условиями

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = q_c, \quad t \in (0, \infty); \quad (36)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=\infty} = 0, \quad t \in (0, \infty). \quad (37)$$

Решим эту задачу операционным методом.

Этап 1

Применим преобразование Лапласа (31), (32) к уравнению (34) и запишем полученное неоднородное дифференциальное уравнение для изображений в стандартном виде

$$a \frac{d^2 \bar{T}(x, p)}{dx^2} - p \bar{T}(x, p) = -T_0. \quad (38)$$

Этап 2

2.1. Рассмотрим соответствующее (38) однородное уравнение второго порядка

$$a \frac{d^2 \bar{T}(x, p)}{dx^2} - p \bar{T}(x, p) = 0. \quad (39)$$

Его общее решение имеет вид

$$\bar{T}(x, p) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}. \quad (40)$$

Для нахождения значений r_1 и r_2 на основе замены $\frac{d^n \bar{T}(x, p)}{dx^n} \rightarrow r^n$ составляется характеристическое уравнение

$$ar^2 - p = 0, \quad (41)$$

откуда определяются его корни

$$r_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{p}{a}}, \quad (42)$$

и общее решение однородного уравнения (39) записывается в виде

$$\bar{T}(x, p) = C_1 e^{\sqrt{\frac{p}{a}} x} + C_2 e^{-\sqrt{\frac{p}{a}} x}. \quad (43)$$

2.2. В случае равномерного начального распределения температур правая часть уравнения (38) имеет специальный вид $f(x) = -T_0$, которой соответствует решение

$$\bar{T}_{\text{част}}(x, p) = \frac{T_0}{p}. \quad (44)$$

Решение (44) получается непосредственно из (38), если приравнять производную второго порядка нулю. Равенство производной нулю, в свою очередь очевидно: температура постоянна по всей длине, а производная от константы равна нулю.

2.3. Общее решение неоднородного уравнения (38) в пространстве изображений состоит из суммы (43) и (44)

$$\bar{T}(x, p) = C_1 e^{\sqrt{\frac{p}{a}}x} + C_2 e^{-\sqrt{\frac{p}{a}}x} + \frac{T_0}{p}. \quad (45)$$

Этап 3

Для нахождения произвольных постоянных C_1 и C_2 переведем с помощью преобразования Лапласа граничные условия в пространство изображений:

$$-\lambda \left. \frac{d\bar{T}(x, p)}{dx} \right|_{x=0} = \frac{q_c}{p}; \quad (46)$$

$$\left. \frac{d\bar{T}(x, p)}{dx} \right|_{x=\infty} = 0. \quad (47)$$

На основании (45) найдём выражение для производной $\frac{d\bar{T}(x, p)}{dx}$:

$$\frac{d\bar{T}(x, p)}{dx} = \sqrt{\frac{p}{a}} C_1 e^{\sqrt{\frac{p}{a}}x} - \sqrt{\frac{p}{a}} C_2 e^{-\sqrt{\frac{p}{a}}x}. \quad (48)$$

Рассмотрим граничное условие (47) для $x = \infty$. Подставим в выражение (48) значение $x = \infty$.

$$\left. \frac{d\bar{T}(x, p)}{dx} \right|_{x=\infty} = \left(\sqrt{\frac{p}{a}} C_1 e^{\sqrt{\frac{p}{a}}x} - \sqrt{\frac{p}{a}} C_2 e^{-\sqrt{\frac{p}{a}}x} \right)_{x=\infty} = 0. \quad (49)$$

Второе слагаемое в (49) при $x = \infty$ равно нулю, благодаря отрицательному значению показателя степени экспоненты, а первое слагаемое стремится к бесконечности, что противоречит физике процесса нагрева тела. Единственный способ избежать этого противоречия – принять константу C_1 равной нулю:

$$C_1 = 0. \quad (50)$$

На основании (48), с учётом (50), найдём выражение для $\left. \frac{d\bar{T}(x, p)}{dx} \right|_{x=0}$:

$$\left. \frac{d\bar{T}(x, p)}{dx} \right|_{x=0} = -\lambda \left(\sqrt{\frac{p}{a}} C_1 e^{\sqrt{\frac{p}{a}} x} - \sqrt{\frac{p}{a}} C_2 e^{-\sqrt{\frac{p}{a}} x} \right) \Big|_{x=0} = \lambda \sqrt{\frac{p}{a}} C_2. \quad (51)$$

Подставив (51) в граничное условие для $x = 0$ (46) получаем соотношение

$$\lambda \sqrt{\frac{p}{a}} C_2 = \frac{q_c}{p}. \quad (52)$$

Откуда находим значение второй постоянной

$$C_2 = \frac{q_c}{\lambda p} \sqrt{\frac{a}{p}}. \quad (53)$$

На основании (45), (50) и (53) запишем частное решение для изображений

$$\bar{T}(x, p) = \frac{q_c}{\lambda p} \sqrt{\frac{a}{p}} e^{-\sqrt{\frac{p}{a}} x} + \frac{T_0}{p} = \frac{q_c \sqrt{a}}{\lambda} \frac{1}{p \sqrt{p}} e^{-\frac{x}{\sqrt{a}} \sqrt{p}} + \frac{T_0}{p}. \quad (54)$$

Этап 4

Для нахождения оригинала решения воспользуемся таблицей преобразований, откуда (см. Приложение 1, свойство 2 и Приложение 2, п. 52 и п. 1) получаем

$$\begin{aligned} T(x, t) &= \frac{2q_c \sqrt{at}}{\lambda} \operatorname{ierfc} \frac{x}{2\sqrt{at}} + T_0 = \\ &= \frac{2q_c \sqrt{at}}{\lambda} \left(\sqrt{\frac{1}{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4at}} - \frac{x}{2\sqrt{at}} \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{at}} \right) + T_0 = \\ &= \frac{q_c}{\lambda} \left(\frac{2\sqrt{at}}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4at}} - x \cdot \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{at}} \right) + T_0. \end{aligned} \quad (55)$$

Примечание

При решении задач математической физики встречаются специальные математические функции, не сводящиеся к элементарным функциям, – функции ошибок. Приведём здесь наиболее распространённые из них:

1. Функция ошибок Гаусса (интеграл вероятности ошибки)

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-y^2} dy. \quad (56)$$

Основные свойства функции $\operatorname{erf}(z)$:

$$\operatorname{erf}(\infty) = 1; \quad \operatorname{erf}(-z) = -\operatorname{erf}(z).$$

2. Дополняющая функция ошибок $\operatorname{erfc}(z)$ (вычисляет дополнение к интегралу вероятности ошибки)

$$\operatorname{erfc}(z) = 1 - \operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^{\infty} e^{-y^2} dy. \quad (57)$$

В некоторых современных программных средствах для математических расчетов (например, Matlab, Mathematica) функции $\operatorname{erf}(z)$ и $\operatorname{erfc}(z)$ являются встроенными.

Графики рассмотренных функций имеют вид (рис. 2)

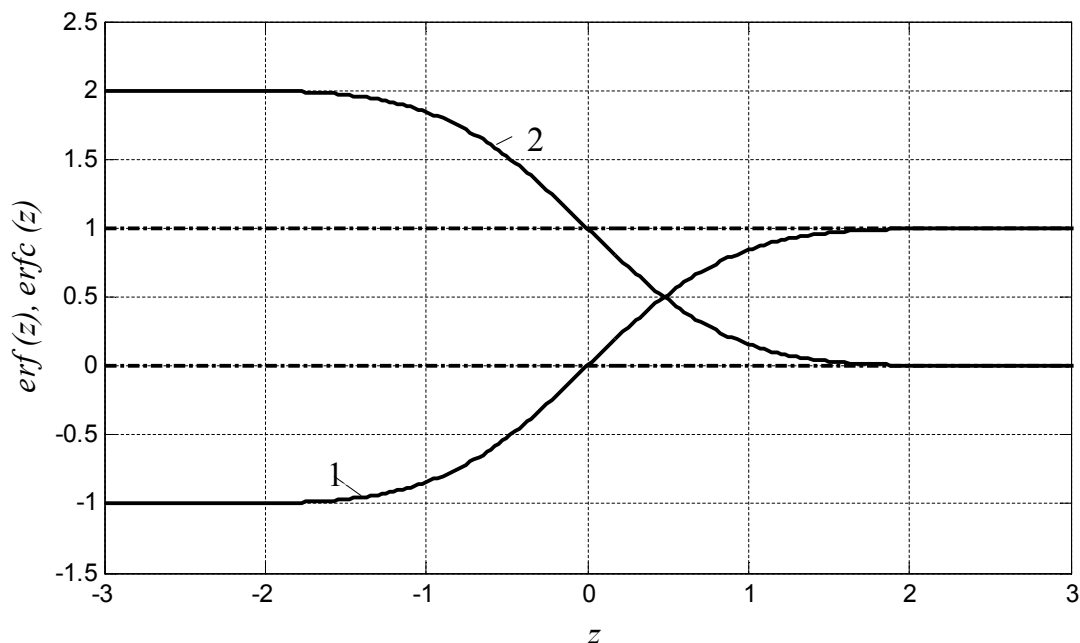


Рис. 2. Графики функций $\operatorname{erf}(z)$ – кривая 1 и $\operatorname{erfc}(z)$ – кривая 2

3. Операции дифференцирования и интегрирования функций $\operatorname{erf}(z)$ и $\operatorname{erfc}(z)$. Для интегрирования функции $\operatorname{erfc}(z)$ применяются обозначения

$$i^n \operatorname{erfc}(z) = \int_z^{\infty} i^{n-1} \operatorname{erfc}(\xi) d\xi. \quad (58)$$

Функция $i \operatorname{erfc}(z)$ может быть выражена через функцию $\operatorname{erfc}(z)$

$$i \operatorname{erfc}(z) = \int_z^{\infty} \operatorname{erfc}(\xi) d\xi = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2} - z \operatorname{erfc}(z). \quad (59)$$

Общая рекуррентная функция имеет вид

$$2ni^n \operatorname{erfc}(z) = i^{n-2} \operatorname{erfc}(z) - 2zi^{n-1} \operatorname{erfc}(z). \quad (60)$$

Пример реализации решения (55) в Matlab приведён в листинге 1.

Листинг 1. Расчёт поведения температуры во времени в заданных точках пространственной координаты

```
% Исходные данные
lam=47;           % Коэффициент теплопроводности стали
c=462;           % Удельная теплоемкость стали
ro=7.8e3;        % Плотность стали
q=65000;        % Удельная плотность теплового потока
T0=20;          % Начальная температура стержня
a=lam/(c*ro);   % Коэффициент температуропроводности

X=[0 0.02 0.05 0.1]; % Вектор пространственных координат
                    % точек контроля, [м]

N=length(X);    % Количество точек контроля
T_end=600;      % Длина интервала моделирования, [с]
dt=T_end/100;  % Временной шаг моделирования, [с]

% Двойной цикл для моделирования изменения температурного
% поля во времени в точках, принадлежащих вектору X
for i=1:N
    x=X(i);
    j=1;
    t=0;
    T(i,j)=T0;
    j=j+1;
```

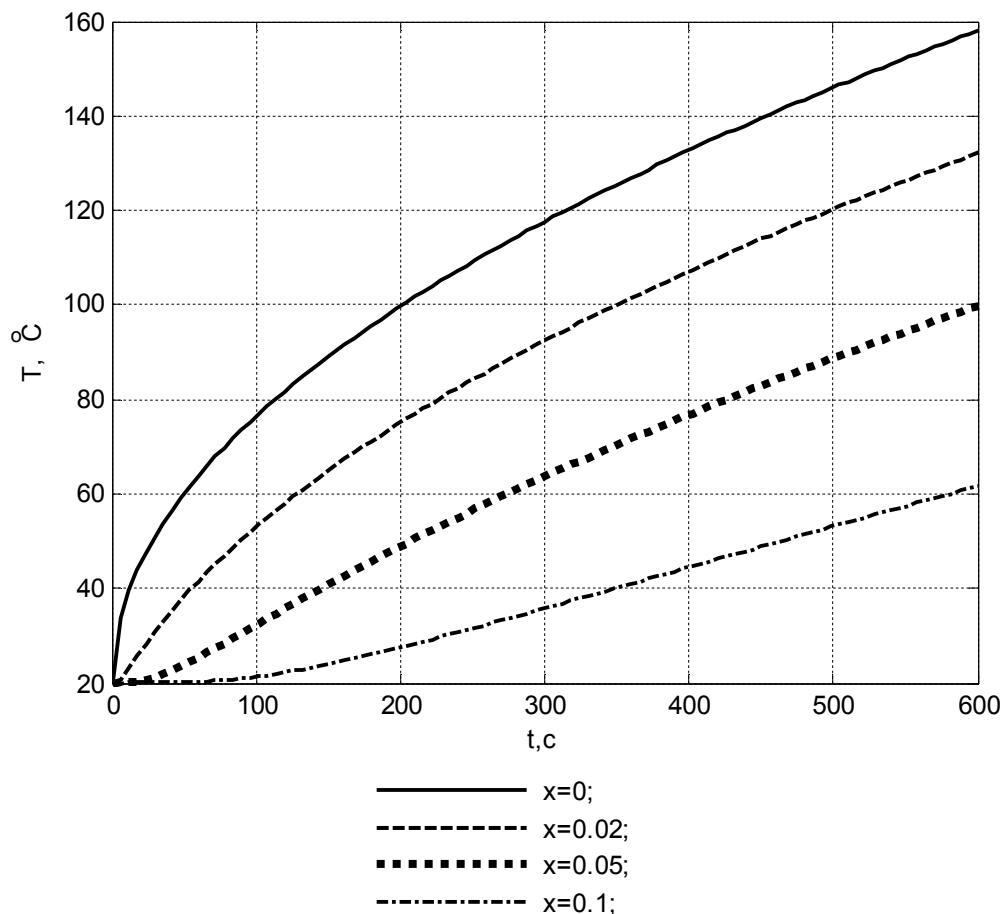
```

for t=dt:dt:T_end
    T(i,j)=q/lam*(2*(a*t/pi)^.5*exp(-x^2/(4*a*t))-...
        x*erfc(x/(2*(a*t)^.5)))+T0;
    j=j+1;
end
end
t_m=0:dt:T_end; % Массив значений моментов времени
                % измерений, [с]

figure(1)
plot(t_m, T(1,:),t_m, T(2,:),t_m, T(3,:),t_m, T(4,:))
grid

```

В результате решения краевой задачи теплопроводности (34) – (37) и моделирования рассматриваемого процесса в Matlab получены следующие результаты (рис. 3).



1 – $x_1 = 0$; 2 – $x_2 = 0.02$; 3 – $x_3 = 0.05$; 4 – $x_4 = 0.1$

Рис. 3. График зависимости температуры тела от времени для принятых значений точек контроля

Рассматриваемая задача (34)-(37) относится к краевым задачам теплопроводности второго рода. Управляющим воздействием здесь является заданный постоянный тепловой поток q_c на границе $x = 0$. Соответственно, полученные графики (рис. 3) изменения выходного воздействия – температуры – при постоянном входном воздействии являются переходными характеристиками объекта в различных точках.

Как видно из рис. 3, рассматриваемый объект при управлении по тепловому потоку обладает астатическими свойствами, и для любого фиксированного значения x представляет собой объект без самовыравнивания. Это очевидно на регулярной стадии процесса нагрева (при $t > 500$ с), когда температура в различных точках объема тела изменяется по линейному закону с постоянной скоростью.

Рассмотрим пространственное распределение температурного поля в процессе нагрева. Для этого промоделируем изменение температуры (55) по пространственной координате $x \in [0,0.1]$ в несколько моментов времени $t_1 = 30$ с, $t_2 = 90$ с, $t_3 = 220$ с, $t_4 = 400$ с, $t_5 = 600$ с (листинг 2).

Листинг 2. Расчёт температурных распределений по пространственной координате в заданные моменты времени

```
Tt=[30 90 220 400 T_end]; % Вектор значений моментов
                               % времени измерения
N1=length (Tt); % Количество моментов времени
x_end=X(N); % Длина участка изменения
                % пространственной координаты
dx=x_end/100; % Шаг моделирования по пространственной
                % координате

% Моделирование пространственного изменения
% температурного поля в различные моменты времени
for i=1:N1
    t=Tt(i);
    j=1;
```

```

for x=0:dx:x_end
    Tx(i,j)=q/lam*(2*(a*t/pi)^.5*exp(-x^2/(4*a*t))-...
        x*erfc(x/(2*(a*t)^.5)))+T0;
    j=j+1;
end
end

x_m=0:dx:x_end; % Массив значений пространственных
                % координат

figure (2)
plot(x_m, Tx(1,:),x_m, Tx(2,:),x_m, Tx(3,:),...
     x_m, Tx(4,:),x_m, Tx(5,:))
grid

```

Из рис. 4 видно, что при подаче на внутреннюю границу тела постоянного теплового потока пространственное распределение температуры убывает от точки $x = 0$ к бесконечно удалённой границе в любой момент времени. При этом кривые 1, 2 и 3, полученные в моменты времени t_1 , t_2 и t_3 , соответствуют для выбранного участка изменения пространственной координаты моментам времени до выхода на регулярную стадию нагрева, а кривые 4 и 5 – регулярной стадии, на протяжении которой сохраняется неизменное во времени параболическое распределение температуры по пространственной координате.

Полученные графики температурного распределения во времени (рис. 3) и в пространстве (рис. 4) соответствуют одноинтервальному управлению при неизменной плотности теплового потока. Характерная задача оптимизации процесса нагрева металла перед последующей обработкой давлением [9, 10] предусматривает управление по граничным условиям, состоящее из чередующихся интервалов нагрева с максимальной мощностью и последующего интервала выравнивания температур при нулевой мощности нагрева. В большинстве типичных ситуаций число интервалов постоянства не превышает двух-трёх.

Рассмотрим процесс нагрева, состоящий из двух интервалов – интервала максимальной мощности и интервала выравнивания температур.

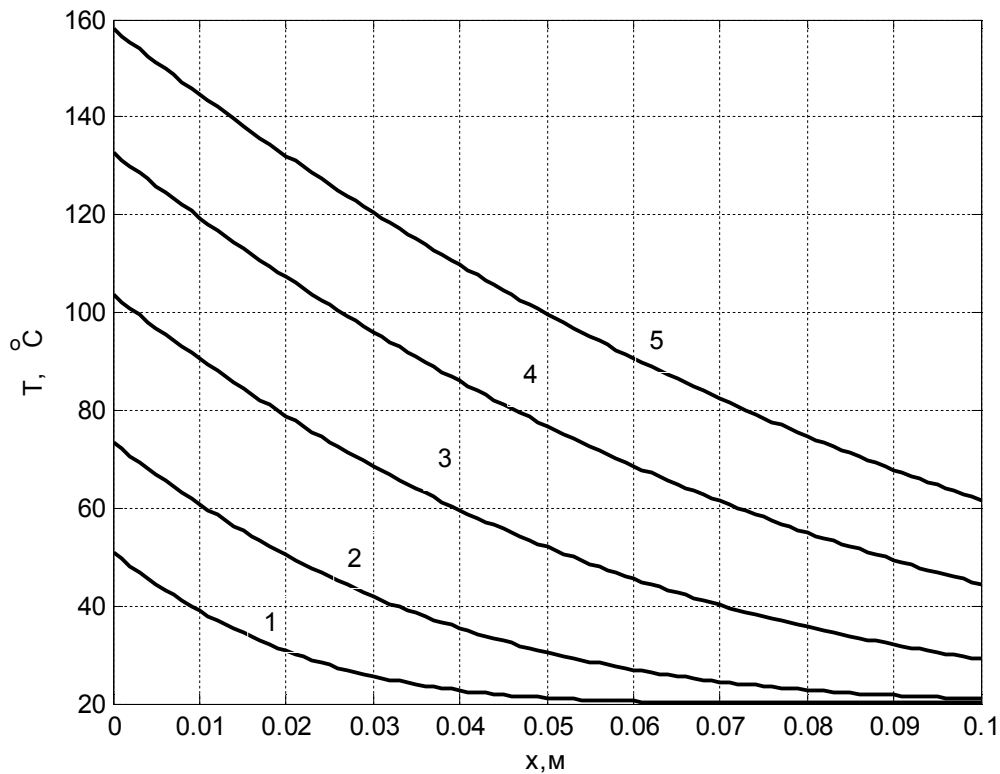


Рис. 4. Пространственное распределение температур (кривые 1-5) в заданные моменты времени $t_1 - t_5$

Приведём программную реализацию процесса нагрева при двухинтервальном управлении (листинг 3). Момент времени $t = 600$ с примем за окончание интервала нагрева и промоделируем изменение температуры (55) во времени $t = [0, 800]$ с и в пространстве $x \in [0, 0.1]$ в следующие моменты $t_1 = 500$ с, $t_2 = 600$ с, $t_3 = 670$ с, $t_4 = 740$ с, $t_5 = 800$ с.

Листинг 3. Расчёт температурного распределения при двухинтервальном управлении

```
T_end1=600;      % Длина интервала моделирования, [с]
T_end2=800;     % Длина интервала моделирования
dt=T_end1/100; % Временной шаг моделирования, [с]
```

```

% Моделирование температурного распределения
% во времени в фиксированных точках x
for i=1:N
    x=X(i);
    T(i,1)=T0; % значение температуры при t=0 (j=1)
    j=2;
    for t=dt:dt:T_end1
        T(i,j)=q/lam*(2*(a*t/pi)^.5*exp(-x^2/(4*a*t))-...
            x*erfc(x/(2*(a*t)^.5)))+T0;
        j=j+1;
    end
    for t=(T_end1+dt):dt:T_end2
        T(i,j)=q/lam*(2*(a*t/pi)^.5*exp(-x^2/(4*a*t))-...
            x*erfc(x/(2*(a*t)^.5)))-...
            (q/lam*(2*(a*(t-T_end1)/pi)^.5*...
            exp(-x^2/(4*a*(t-T_end1)))-...
            x*erfc(x/(2*(a*(t-T_end1))^.5))))+T0;
        j=j+1;
    end
end
t_m=0:dt:T_end2; % Массив значений моментов
                % времени измерений

figure (1)
plot(t_m, T(1,:),t_m, T(2,:),t_m, T(3,:),t_m, T(4,:))
grid

Tt=[500 600 670 740 800]; % Вектор значений моментов
                        % времени измерения

N1=length (Tt); % Количество моментов времени
x_end=X(N);     % Длина участка изменения
                % пространственной координаты
dx=x_end/100;  % Шаг моделирования по пространственной
                % координате

% Моделирование пространственного изменения
% температурного поля в различные моменты времени
for i=1:N1
    t=Tt(i);
    j=1;

```

```

if (t<=T_end1)
    for x=0:dx:x_end
        Tx(i,j)=q/lam*(2*(a*t/pi)^.5*exp(-x^2/(4*a*t))-...
            x*erfc(x/(2*(a*t)^.5)))+T0;
        j=j+1;
    end
else
    for x=0:dx:x_end
        Tx(i,j)=q/lam*(2*(a*t/pi)^.5*exp(-x^2/(4*a*t))-...
            x*erfc(x/(2*(a*t)^.5)))-...
            (q/lam*(2*(a*(t-T_end1)/pi)^.5*...
            exp(-x^2/(4*a*(t-T_end1)))-...
            x*erfc(x/(2*(a*(t-T_end1))^.5))))+T0;
        j=j+1;
    end
end
end
x_m=0:dx:x_end; % Массив значений пространственных
                % координат

figure (2)
plot(x_m, Tx(1,:),x_m, Tx(2,:),x_m, Tx(3,:),...
     x_m, Tx(4,:),x_m, Tx(5,:))
grid

```

Рисунки 5 и 6 показывают характерное поведение температурного поля в течение первого интервала нагрева с максимальной мощностью и последующего интервала выравнивания температур. Момент времени $t_2 = 600\text{c}$ соответствует окончанию интервала нагрева, после чего тепловой поток более не поступает на тело. Во время второго интервала происходит снижение неравномерности нагрева за счет выравнивания температурного поля между «перегретой» границей $x = 0$ и «недогретыми» внутренними точками. На рис. 6 видно уменьшение неравномерности температурного распределения на рассматриваемом участке $x \in [0, 0.1]$ от $\Delta T \approx 158 - 62 \approx 96^\circ\text{C}$ при $t_2 = 600\text{c}$ до $\Delta T \approx 100 - 70 \approx 30^\circ\text{C}$ при $t_5 = 800\text{c}$.

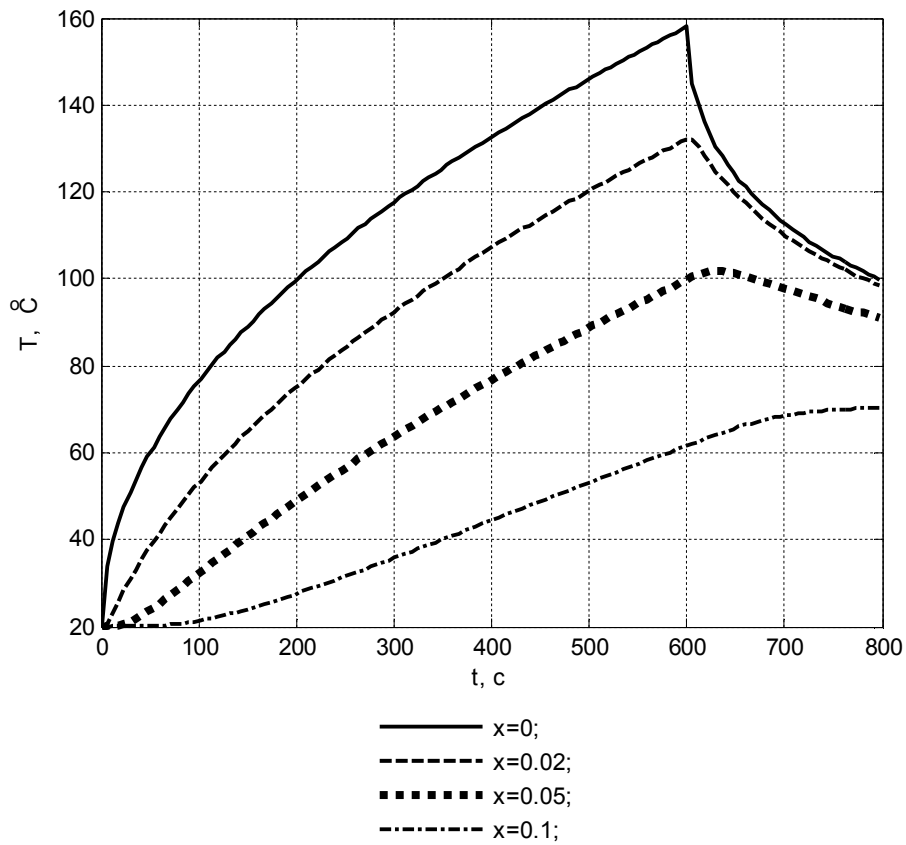


Рис. 5. График зависимости температуры тела от времени в контролируемых точках при двухинтервальном управлении

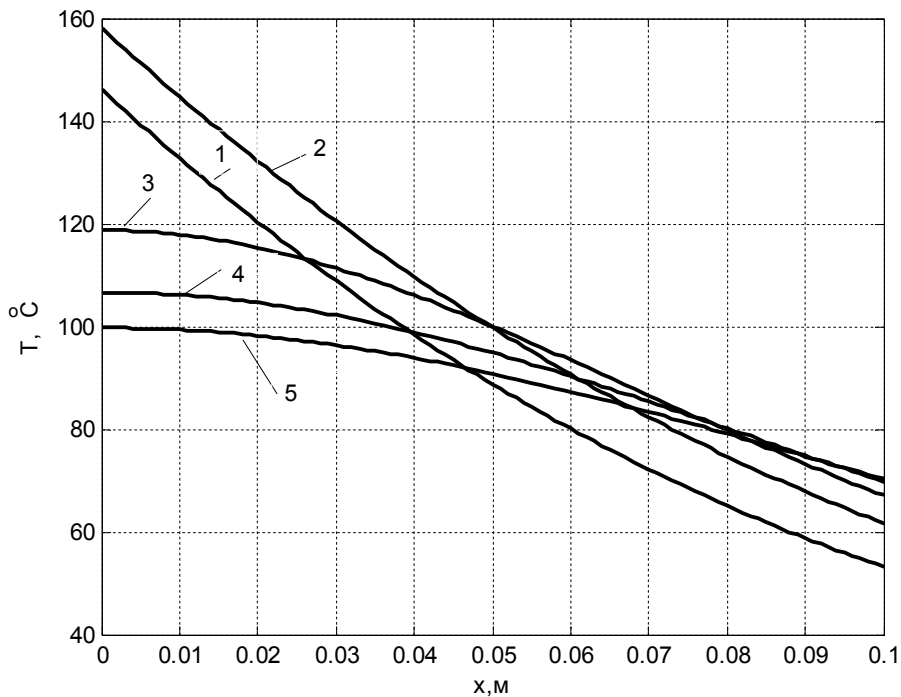


Рис. 6. Пространственное распределение температур (кривые 1-5) в заданные моменты времени $t_1 - t_5$ при двухинтервальном управлении

Задача 2. Нагрев тела конечных размеров

Найти температуру стального стержня длиной l , с теплоизолированной боковой поверхностью, если граница $x = 0$ стержня теплоизолирована, а на границе $x = l$ происходит конвективный теплообмен с окружающей средой, температура которой меняется по закону $T_c(t) = T^* - (T^* - T_0)e^{-\beta t}$. Начальная температура стержня равна T_0 .

Построить график зависимости температуры стержня от времени в нескольких точках по объему тела, сравнить с графиком температуры среды.

Исходные данные:

$$l = 1.2 \text{ м}, T_0 = 20^0 \text{ C}, T^* = 120^0 \text{ C}, \beta = 2 \cdot 10^{-4} \frac{1}{\text{с}}.$$

Решение

Построим математическую модель рассматриваемого объекта. Одномерное дифференциальное уравнение теплопроводности имеет вид

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}, \quad x \in [0, l], t \in (0, \infty) \quad (61)$$

с соответствующими краевыми условиями

$$T(x,t)|_{t=0} = T_0, \quad x \in (0, l); \quad (62)$$

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad t \in (0, \infty); \quad (63)$$

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=l} = \alpha(T_c(t) - T(l,t)), \quad t \in (0, \infty), \quad (64)$$

где $T_c(t) = T^* - (T^* - T_0)e^{-\beta t}$.

По-прежнему будем решать поставленную задачу на основе операционного метода.

Этап 1 и этап 2 выполнены ранее для задачи 1, дифференциальное уравнение для изображений совпадает с выражением (38) с той

лишь разницей, что в данной задаче область изменения пространственной координаты ограничена $x \in [0, l]$.

Его общее решение также получено ранее и совпадает с (45).

Этап 3

Для нахождения произвольных постоянных C_1 и C_2 переведем граничные условия в пространство изображений

$$\left. \frac{d\bar{T}(x, p)}{dx} \right|_{x=0} = 0; \quad (65)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\bar{T}(x, p)}{dx} \right|_{x=l} &= L^{-1} \left\{ \frac{\alpha}{\lambda} (T^* - (T^* - T_0)e^{-\beta t} - T(l, t)) \right\} = \\ &= \frac{\alpha}{\lambda} \left(\frac{T^*}{p} - \frac{T^* - T_0}{p + \beta} - \bar{T}(l, p) \right). \end{aligned} \quad (66)$$

С учётом полученного ранее выражения для производной $\frac{d\bar{T}(x, p)}{dx}$ (48), запишем граничное условие (65) при $x = 0$:

$$\left. \frac{d\bar{T}(x, p)}{dx} \right|_{x=0} = \left(\sqrt{\frac{p}{a}} C_1 e^{\sqrt{\frac{p}{a}} x} - \sqrt{\frac{p}{a}} C_2 e^{-\sqrt{\frac{p}{a}} x} \right)_{x=0} = \sqrt{\frac{p}{a}} (C_1 - C_2) = 0, \quad (67)$$

откуда

$$C_1 = C_2 = \frac{C}{2}. \quad (68)$$

Используя известные соотношения $\frac{e^z - e^{-z}}{2} = \text{sh } z$; $\frac{e^z + e^{-z}}{2} = \text{ch } z$

и полученные значения произвольных постоянных (68), представим выражение (45) в виде

$$\bar{T}(x, p) = \frac{C}{2} \left(e^{\sqrt{\frac{p}{a}} x} + e^{-\sqrt{\frac{p}{a}} x} \right) + \frac{T_0}{p} = C \text{ch} \left(\sqrt{\frac{p}{a}} x \right) + \frac{T_0}{p}, \quad (69)$$

и, соответственно, выражение для производной в виде

$$\frac{d\bar{T}(x, p)}{dx} = C \sqrt{\frac{p}{a}} \text{sh} \left(\sqrt{\frac{p}{a}} x \right). \quad (70)$$

Применим (69) и (70) к граничному условию (66) на границе $x = l$:

$$\left. \frac{d\bar{T}(x, p)}{dx} \right|_{x=l} = C \sqrt{\frac{p}{a}} \operatorname{sh} \left(\sqrt{\frac{p}{a}} l \right) = \frac{\alpha}{\lambda} \left(\frac{T^*}{p} - \frac{T^* - T_0}{p + \beta} - C \operatorname{ch} \left(\sqrt{\frac{p}{a}} l \right) - \frac{T_0}{p} \right). \quad (71)$$

Через промежуточные преобразования

$$C \left(\frac{\alpha}{\lambda} \operatorname{ch} \left(\sqrt{\frac{p}{a}} l \right) + \sqrt{\frac{p}{a}} \operatorname{sh} \left(\sqrt{\frac{p}{a}} l \right) \right) = \frac{\alpha}{\lambda} \left(\frac{T^* - T_0}{p} - \frac{T^* - T_0}{p + \beta} \right) \quad (72)$$

получим выражение для произвольной постоянной

$$C = \frac{(T^* - T_0)}{p \left(\frac{p}{\beta} + 1 \right) \left(\operatorname{ch} \left(\sqrt{\frac{p}{a}} l \right) + \frac{\lambda}{\alpha} \sqrt{\frac{p}{a}} \operatorname{sh} \left(\sqrt{\frac{p}{a}} l \right) \right)}. \quad (73)$$

На основании (69) и (73) частное решение для изображений, соответствующее заданным краевым условиям, примет вид

$$\bar{T}(x, p) = \frac{(T^* - T_0) \operatorname{ch} \left(\sqrt{\frac{p}{a}} x \right)}{p \left(\frac{p}{\beta} + 1 \right) \left(\operatorname{ch} \left(\sqrt{\frac{p}{a}} l \right) + \frac{\lambda}{\alpha} \sqrt{\frac{p}{a}} \operatorname{sh} \left(\sqrt{\frac{p}{a}} l \right) \right)} + \frac{T_0}{p}. \quad (74)$$

Этап 4

Найти оригинал

$$\frac{(T^* - T_0) \operatorname{ch} \left(\sqrt{\frac{p}{a}} x \right)}{p \left(\frac{p}{\beta} + 1 \right) \left(\operatorname{ch} \left(\sqrt{\frac{p}{a}} l \right) + \frac{\lambda}{\alpha} \sqrt{\frac{p}{a}} \operatorname{sh} \left(\sqrt{\frac{p}{a}} l \right) \right)} = \frac{\varphi(p)}{\psi(p)} \quad (75)$$

с использованием таблиц преобразований не удастся, поэтому рассмотрим возможность применения теоремы разложения. С помощью разложения гиперболических функций в ряд (Приложение 3) выражение числителя $\operatorname{ch} \left(\sqrt{\frac{p}{a}} x \right)$ может быть приведено к полиному относительно p , аналогично выражения знаменателя $\operatorname{ch} \left(\sqrt{\frac{p}{a}} l \right)$ и

$\sqrt{\frac{p}{a}} \operatorname{sh}\left(\sqrt{\frac{p}{a}} l\right)$ также являются полиномами степеней p , причём полином знаменателя не содержит постоянной, что обуславливает возможность применения теоремы разложения.

Найдём корни знаменателя $\psi(p)$

$$\psi(p) = p\left(\frac{p}{\beta} + 1\right)\left(\operatorname{ch}\left(\sqrt{\frac{p}{a}} l\right) + \frac{\lambda}{\alpha} \sqrt{\frac{p}{a}} \operatorname{sh}\left(\sqrt{\frac{p}{a}} l\right)\right) = 0. \quad (76)$$

Первый очевидный корень $p_1 = 0$, второй корень $p_2 = -\beta$, для нахождения других корней воспользуемся соотношениями

$$\operatorname{sh} z = -i \sin iz; \operatorname{ch} z = \cos iz. \quad (77)$$

С использованием (77) из выражения (76) можно получить

$$\cos\left(i\sqrt{\frac{p}{a}} l\right) - i\frac{\lambda}{\alpha} \sqrt{\frac{p}{a}} \sin\left(i\sqrt{\frac{p}{a}} l\right) = 0. \quad (78)$$

Обозначим

$$i\sqrt{\frac{p}{a}} l = \mu, \quad (79)$$

и выражение (78) примет вид

$$\cos \mu - \frac{\lambda}{\alpha} \cdot \frac{\mu}{l} \cdot \sin \mu = 0. \quad (80)$$

Соотношение (80) – характеристическое уравнение, имеющее бесчисленное множество корней μ_n , которые при приближённом описании функции оригинала с помощью конечного числа корней N могут быть найдены методами численного решения нелинейных уравнений. При этом на основе (79) корни знаменателя p_n , $n = \overline{3, N}$ могут быть выражены как:

$$p_n = -\frac{a\mu_n^2}{l^2}, \quad n = \overline{3, N}. \quad (81)$$

В соответствии со сказанным, полином $\psi(p)$ имеет простые корни p_n , $n = \overline{1, N}$, и для определения оригинала нужно применить теорему разложения (29).

Для этого нужно найти производную знаменателя (76) и подставить сюда соответствующие значения корней p_n , $n = \overline{1, N}$.

Учитывая, что $\text{sh}' z = \text{ch} z$; $\text{ch}' z = \text{sh} z$; получим

$$\begin{aligned} \psi'(p) &= \left[p \left(\frac{p}{\beta} + 1 \right) \left(\text{ch} \left(\sqrt{\frac{p}{a}} l \right) + \frac{\lambda}{\alpha} \sqrt{\frac{p}{a}} \text{sh} \left(\sqrt{\frac{p}{a}} l \right) \right) \right]' = \\ &= \left\{ \left(\frac{p}{\beta} + 1 \right) \left(\text{ch} \left(\sqrt{\frac{p}{a}} l \right) + \frac{\lambda}{\alpha} \sqrt{\frac{p}{a}} \text{sh} \left(\sqrt{\frac{p}{a}} l \right) \right) + \frac{p}{\beta} \left(\text{ch} \left(\sqrt{\frac{p}{a}} l \right) + \frac{\lambda}{\alpha} \sqrt{\frac{p}{a}} \text{sh} \left(\sqrt{\frac{p}{a}} l \right) \right) \right\} + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{p}{\beta} + 1 \right) \left(\sqrt{\frac{p}{a}} l \text{sh} \left(\sqrt{\frac{p}{a}} l \right) + \frac{\lambda}{\alpha} \sqrt{\frac{p}{a}} \text{sh} \left(\sqrt{\frac{p}{a}} l \right) + \frac{\lambda}{\alpha} \cdot \frac{p}{a} \cdot l \text{ch} \left(\sqrt{\frac{p}{a}} l \right) \right). \quad (82) \end{aligned}$$

Найдём значение знаменателя для p_n , $n = \overline{1, N}$.

Для корня $p_1 = 0$ имеем

$$\psi'(0) = \text{ch} 0 = 1. \quad (83)$$

Для корня $p_2 = -\beta$ на основании соотношений $\text{sh} iz = i \sin z$; $\text{ch} iz = \cos z$ получим

$$\begin{aligned} \psi'(-\beta) &= - \left(\text{ch} \left(\sqrt{\frac{-\beta}{a}} l \right) + \frac{\lambda}{\alpha} \sqrt{\frac{-\beta}{a}} \text{sh} \left(\sqrt{\frac{-\beta}{a}} l \right) \right) = \\ &= - \left(\cos \left(\sqrt{\frac{\beta}{a}} l \right) - \frac{\lambda}{\alpha} \sqrt{\frac{\beta}{a}} \cdot \sin \left(\sqrt{\frac{\beta}{a}} l \right) \right). \quad (84) \end{aligned}$$

Для корней $p_n \neq 0$, $n = \overline{3, N}$, учитывая, что на основании (76) первые два слагаемых в скобках в (82) равны нулю, и используя (81) и полученные из (79) соотношения

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{p_n}{a}} &= \sqrt{-\frac{a\mu_n^2}{al^2}} = i \frac{\mu_n}{l}; \quad \sqrt{\frac{p_n}{a}} l = i \mu_n; \\ \text{sh} \left(\sqrt{\frac{p_n}{a}} l \right) &= \text{sh}(i \mu_n) = i \sin \mu_n; \end{aligned}$$

$$\operatorname{ch}\left(\sqrt{\frac{p_n l}{a}}\right) = \operatorname{ch}(i\mu_n) = \cos \mu_n;$$

найдем

$$\psi'(p_n) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{a\mu_n^2}{\beta l^2}\right) \left(-\mu_n \sin \mu_n - \frac{\lambda}{\alpha} \cdot \frac{\mu_n}{l} \cdot \sin \mu_n - \frac{\lambda}{\alpha} \cdot \frac{\mu_n^2}{l} \cos \mu_n\right). \quad (85)$$

Из характеристического уравнения (81) выразим

$$\frac{\lambda}{\alpha l} \cdot \mu_n = \frac{\cos \mu_n}{\sin \mu_n} \quad (86)$$

и подставим в (86)

$$\begin{aligned} \psi'(p_n) &= -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{a\mu_n^2}{\beta l^2}\right) \left(\mu_n \sin \mu_n + \frac{\cos \mu_n}{\sin \mu_n} \sin \mu_n + \mu_n \frac{\cos \mu_n}{\sin \mu_n} \cos \mu_n\right) = \\ &= -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{a\mu_n^2}{\beta l^2}\right) \cdot \frac{1}{\sin \mu_n} (\mu_n \sin^2 \mu_n + \cos \mu_n \sin \mu_n + \mu_n \cos^2 \mu_n) = \\ &= -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{a\mu_n^2}{\beta l^2}\right) \frac{\mu_n + \cos \mu_n \sin \mu_n}{\sin \mu_n}. \end{aligned} \quad (87)$$

Найдем значения числителя $\bar{T}(x, p)$ (76) при $p_1 = 0$

$$\varphi(0) = (T^* - T_0) \operatorname{ch}\left(\sqrt{\frac{p_1}{a}} x\right) = T^* - T_0, \quad (88)$$

при $p_2 = -\beta$

$$\varphi(-\beta) = (T^* - T_0) \operatorname{ch}\left(\sqrt{\frac{p_2}{a}} x\right) = (T^* - T_0) \cos\left(\sqrt{\frac{\beta}{a}} x\right), \quad (89)$$

и при $p_n = -\frac{a\mu_n^2}{l^2}$, $n = \overline{3, N}$

$$\varphi(p_n) = (T^* - T_0) \operatorname{ch}\left(\sqrt{-\frac{\mu_n^2}{l^2}} x\right) = (T^* - T_0) \operatorname{ch}\left(i \frac{\mu_n}{l} x\right) = (T^* - T_0) \cos\left(\frac{\mu_n}{l} x\right). \quad (90)$$

На основании (29), (83), (84), (87), (88), (89), (90) получим выражение для оригинала $T(x, t)$

$$T(x, t) = \sum_{n=1}^N \frac{\varphi(p_n)}{\psi'(p_n)} \cdot e^{p_n t} = (T^* - T_0) \times$$

$$\times \left(1 - \frac{\cos\left(\sqrt{\frac{\beta}{a}} x\right)}{\left(\cos\left(\sqrt{\frac{\beta}{a}} l\right) - \frac{\lambda}{\alpha} \sqrt{\frac{\beta}{a}} \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{\beta}{a}} l\right)\right)} e^{-\beta t} - \right.$$

$$\left. - \sum_{n=1}^N \frac{2 \sin \mu_n}{\left(1 - \frac{a \mu_n^2}{\beta l^2}\right) (\mu_n + \cos \mu_n \sin \mu_n)} \cos\left(\frac{\mu_n}{l} x\right) \exp\left(-\frac{a \mu_n^2}{l^2} t\right) \right) + T_0. \quad (91)$$

Программная реализация моделирования температурного поля
 Задачи 2. Рассмотрим поведение температуры (91) во времени
 $t = [0, t^0]$, $t^0 = 500000c$ для пространственных координат $x = [0, l/2, l]$
 и в пространстве $x \in [0, l]$ в отдельные моменты $t_1 = 0.05t^0$;
 $t_2 = 0.15t^0$; $t_3 = 0.35t^0$; $t_4 = 0.6t^0$; $t_5 = t^0$ (листинг 4).

Листинг 4. Расчёт температурного распределения

```
% Исходные данные
lam=47;           % Коэффициент теплопроводности стали
c=462;           % Удельная теплоемкость стали
ro=7.8e3;        % Плотность стали
alfa=40;         % Коэффициент теплоотдачи стали
a=lam/(c*ro);    % Коэффициент температуропроводности
l=1.2;           % длина стержня
T_end=500000;    % Длительность интервала моделирования
dt=T_end/100;    % Временной шаг моделирования
T0=20;           % Начальная температура стержня
T_z=120;         % Заданная температура стержня
bet=0.0002;      %
N=100;           % количество учитываемых собственных чисел
```

```

% Характеристическое уравнение для определения
% собственных чисел
fun=@(x) cos(x)-lam/(alfa*l)*x*sin(x);

% Численное решение характеристического уравнения
j=1;
mu(j)=fzero(fun, 0.1);
eps=2;
for j=2:N
    mu(j)=fzero(fun, pi*(j-1));
end

% Моделирование температуры среды
j=1;
for t=0:dt:T_end
    T_c(j)=T_z-(T_z-T0)*exp(-bet*t);
    j=j+1;
end

t_m=0:dt:T_end; % Массив значений моментов времени
                    % измерений
X=[0 1/2 1];      % Вектор пространственных координат точек
                    % контроля
N=length(X);      % Количество точек контроля

% Двойной цикл для моделирования изменения температурного
% поля во времени в точках, принадлежащих вектору X
for i=1:N
    x=X(i);
    j=1;
    for t=0:dt:T_end
        F=0;
        for m=1:N
            A(m)=2*sin(mu(m))/(mu(m)+sin(mu(m))*cos(mu(m)));
            F=F+A(m)/(1-a*mu(m)^2/(bet*l^2))*...
                cos(mu(m)*x/l)*exp(-mu(m)^2*a*t/l^2);
        end
    end

```

```

w0=cos((bet/a)^.5*1)-...
    lam/alfa*(bet/a)^.5*sin((bet/a)^.5*1);
T(i,j)=(T_z-T0)*(1-cos((bet/a)^.5*x)/...
    w0*exp(-bet*t)-F)+T0;
j=j+1;
end
end
figure(1)
plot(t_m, T(1,:),t_m, T(2,:),t_m, T(3,:),t_m,T_c)
grid

% Вектор значений моментов времени измерения
Tt=[.05*T_end .15*T_end .35*T_end .6*T_end T_end];
N1=length(Tt); % Количество моментов времени
x_end=1; % Длина участка изменения пространственной
    % координаты
dx=x_end/100; % Шаг моделирования по пространственной
    % координате

% Моделирование пространственного изменения
% температурного поля в различные моменты времени
for i=1:N1
    t=Tt(i);
    j=1;
    for x=0:dx:x_end
        F=0;
        for m=1:N
            A(m)=2*sin(mu(m))/(mu(m)+sin(mu(m))*cos(mu(m)));
            F=F+A(m)/(1-a*mu(m)^2/(bet*1^2))*...
                cos(mu(m)*x/1)*exp(-mu(m)^2*a*t/1^2);
        end
        w0=cos((bet/a)^.5*1)-...
            lam/alfa*(bet/a)^.5*sin((bet/a)^.5*1);
        Tx(i,j)=(T_z-T0)*(1-cos((bet/a)^.5*x)/w0*...
            exp(-bet*t)-F)+T0;
        j=j+1;
    end
end
end
end

```

```

x_m=0:dx:x_end; % Массив значений пространственных
                % координат

figure (2)
plot(x_m, Tx(1,:),x_m, Tx(2,:),x_m, Tx(3,:),...
      x_m, Tx(4,:),x_m, Tx(5,:))
grid

```

В условиях третьей краевой задачи объект обладает статическими свойствами, т.е. представляет собой объект с самовыравниванием. При управлении по температуре печи со стороны внешней границы температура во всех точках по объему тела возрастает, асимптотически приближаясь к заданной температуре среды T^* (рис. 7).

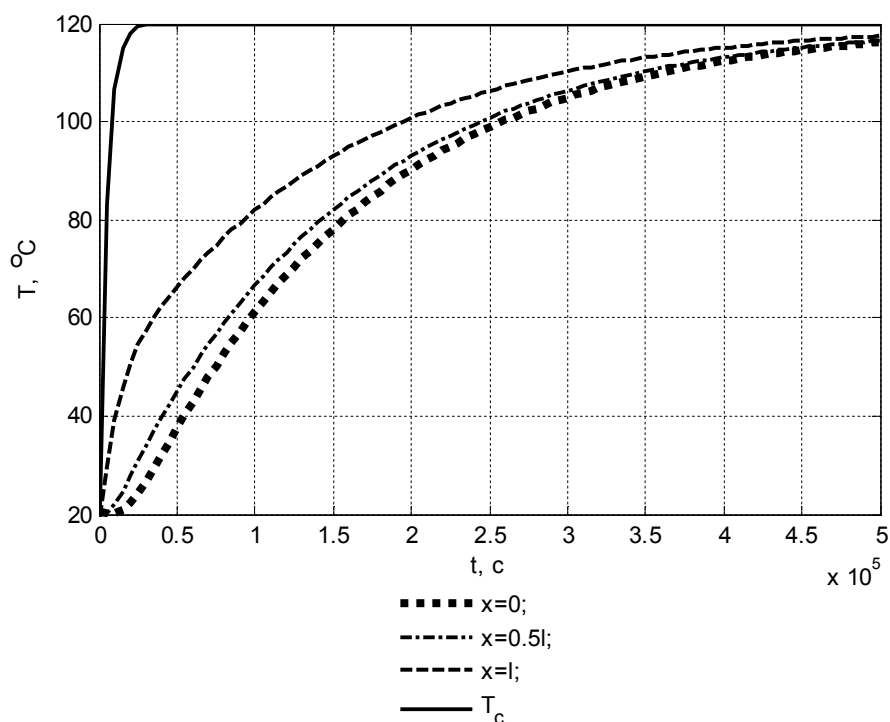


Рис. 7. График зависимости температуры тела от времени в контролируемых точках $x_1 = 0, x_2 = 0.5l, x_3 = l$ и температуры среды T_c

Пространственное распределение температуры возрастает от центра тела к внешней границе в любой момент времени (рис. 8). Поведение выходных характеристик во времени существенно зависит от величины критерия Био $Bi = \alpha l / \lambda$, задаваемого теплофизическими и

геометрическими характеристиками нагреваемого тела. С ростом Био скорость асимптотического приближения значения температуры к температуре печи возрастает.

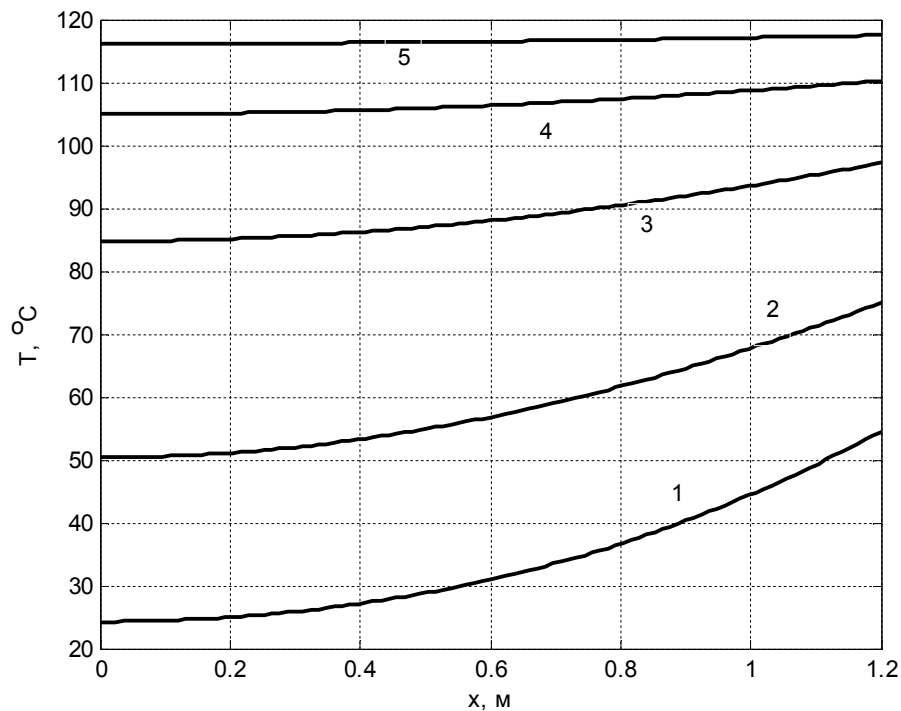


Рис. 8. Пространственное распределение температур (кривые 1-5) в заданные моменты времени $t_1 - t_5$

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Перечислите известные вам методы решения уравнений математической физики. В чём различие между методами конечных интегральных преобразований и методом интегрального преобразования Лапласа?
2. Перечислите основные этапы методики решения краевых задач с помощью интегрального преобразования Лапласа.
3. Перечислите основные свойства функции ошибок Гаусса $\text{erf}(z)$, дополняющей функции ошибок $\text{erfc}(z)$. Является ли дополняющая функция ошибок нечётной функцией?
4. Запишите выражение для расчёта функции $i^3 \text{erfc}(z)$, используя только дополняющую функцию ошибок $\text{erfc}(z)$.
5. Почему при одноинтервальном нагреве полубесконечного тела температура границы (при $x = 0$) всегда выше, чем температура в глубине тела (при $x > 0$)?

6. Может ли при двухинтервальном управлении за счёт теплового потока на границе полубесконечного тела, температура на границе (при $x = 0$) оказаться ниже какой либо точки внутри тела (при $x > 0$)? При каких условиях?

7. Какой функцией Matlab можно воспользоваться, чтобы получить численное решение характеристического уравнения?

8. Как обеспечить двухинтервальное управление, если температурное поле объекта описывается уравнением с граничными условиями третьего рода?

3. ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ

Вариант 1

Дан полуограниченный стальной стержень при температуре T_0 с теплоизолированной боковой поверхностью. Граница стержня $x = \infty$ теплоизолирована, температура на границе $x = 0$ меняется по закону $T_1(t) = T^* - (T^* - T_0)e^{-\beta t}$. Найти температуру стержня, построить график зависимости температуры стержня от времени в нескольких точках по объему тела.

Исходные данные:

$$T_0 = 20^0 C; \quad T^* = 140^0 C; \quad \beta = 3e^{-4} \frac{1}{c}.$$

Вариант 2

Дан полуограниченный стальной стержень при температуре T_0 с теплоизолированной боковой поверхностью. Граница стержня $x = \infty$ теплоизолирована, температура на границе $x = 0$ растет линейно со временем $T_1(t) = T_0 + b \cdot t$. Найти температуру стержня, построить график зависимости температуры стержня от времени в нескольких точках по объему тела.

Исходные данные:

$$T_0 = 20^0 C; \quad b = 4 \frac{1}{c}.$$

Вариант 3

Дан полуограниченный стальной стержень при температуре T_0 с теплоизолированной боковой поверхностью. Граница стержня $x = \infty$ теплоизолирована, температура на границе $x = 0$ растет линейно со временем $T_1(t) = T_0 + b \cdot \sqrt{t}$. Найти температуру стержня, построить график зависимости температуры стержня от времени в нескольких точках по объему тела.

Исходные данные:

$$T_0 = 20^0 C; \quad b = 5 \frac{1}{c}.$$

Вариант 4

Найти распределение температуры стального стержня длиной l , с теплоизолированной боковой поверхностью, если граница стержня $x = 0$ теплоизолирована, а температура границы $x = l$ поддерживается равной T_1 . Начальная температура стержня равна T_0 .

Построить график зависимости температуры стержня от времени в точках по объему тела.

Исходные данные:

$$l = 0.8 \text{ м}; \quad T_0 = 20^0 C; \quad T_1 = 110^0 C.$$

Вариант 5

Дан полуограниченный стальной стержень при температуре T_0 с теплоизолированной боковой поверхностью. Граница стержня $x = \infty$ теплоизолирована, на другой границе $x = 0$ задан тепловой поток, меняющийся по закону $q(t) = q_0 + q_1 \cdot t$. Найти температуру стержня, построить график зависимости температуры стержня от времени в нескольких точках по объему тела.

Исходные данные:

$$T_0 = 20^0 C; \quad q_0 = 50 \text{ Вт} / \text{м}^2; \quad q_1 = 5 \text{ Вт} / \text{м}^2.$$

Вариант 6

Дан полуограниченный стальной стержень при температуре T_0 с теплоизолированной боковой поверхностью. Граница стержня $x = \infty$ теплоизолирована, на другой границе $x = 0$ задан тепловой поток, меняющийся по закону $q(t) = q_0 + q_1\sqrt{t}$. Найти температуру стержня, построить график зависимости температуры стержня от времени в нескольких точках по объему тела.

Исходные данные:

$$T_0 = 20^{\circ}\text{C}; \quad q_0 = 35\text{Вт}/\text{м}^2; \quad q_1 = 8\text{Вт}/\text{м}^2.$$

Вариант 7

Дан полуограниченный стальной стержень при температуре T_0 с теплоизолированной боковой поверхностью. Граница стержня $x = \infty$ теплоизолирована, на другой границе $x = 0$ задан тепловой поток, меняющийся по закону $q(t) = q_1 - (q_1 - q_0)e^{-\beta t}$. Найти температуру стержня, построить график зависимости температуры стержня от времени в нескольких точках по объему тела.

Исходные данные:

$$T_0 = 20^{\circ}\text{C}; \quad q_0 = 35\text{Вт}/\text{м}^2; \quad q_1 = 60\text{кВт}/\text{м}^2; \quad \beta = 10^{-4} \frac{1}{\text{с}}.$$

Вариант 8

Найти распределение температуры стального стержня длиной l , с теплоизолированной боковой поверхностью, если граница стержня $x = 0$ теплоизолирована, а на границе $x = l$ задан постоянный тепловой поток q_c . Начальная температура стержня равна T_0 .

Построить график зависимости температуры стержня от времени в нескольких точках по объему тела.

Исходные данные:

$$l = 1.8\text{м}; \quad T_0 = 20^{\circ}\text{C}; \quad q_c = 45\text{кВт}/\text{м}^2.$$

Вариант 9

Дан полуограниченный стальной стержень при температуре T_0 с теплоизолированной боковой поверхностью. Граница стержня $x = \infty$ теплоизолирована, а на границе $x = 0$ происходит конвективный теплообмен с окружающей средой, температура которой постоянна $T_c(t) = T_c$. Найти температуру стержня, построить график зависимости температуры стержня от времени в нескольких точках по объему тела.

Исходные данные:

$$T_0 = 20^{\circ}C; \quad T_c = 125^{\circ}C.$$

Вариант 10

Дан полуограниченный стальной стержень при температуре T_0 с теплоизолированной боковой поверхностью. Граница стержня $x = \infty$ теплоизолирована, а на границе $x = 0$ происходит конвективный теплообмен с окружающей средой, температура которой меняется по закону $T_c(t) = T_0 + b_1 \cdot \sqrt{\frac{t}{\pi}}$. Найти температуру стержня, построить график зависимости температуры стержня от времени в нескольких точках по объему тела.

Исходные данные:

$$T_0 = 20^{\circ}C; \quad b_1 = 5 \frac{1}{\sqrt{c}}.$$

Вариант 11

Найти распределение температуры стального стержня длиной l , с теплоизолированной боковой поверхностью, если на границе $x = 0$ задан постоянный тепловой поток $q(t) = q_c$, а на границе $x = l$ происходит конвективный теплообмен с окружающей средой, температура которой равна нулю. Начальная температура стержня равна T_0 .

Построить график зависимости температуры стержня от времени в нескольких точках по объему тела.

Исходные данные:

$$l = 1\text{ м}; \quad T_0 = 20^0\text{ C}; \quad q_c = 50\text{ кВт/м}^2.$$

Вариант 12

Найти распределение температуры стального стержня длиной l , с теплоизолированной боковой поверхностью, если температура границы $x = 0$ поддерживается постоянной $T_1(t) = T_1$, на границе $x = l$ происходит конвективный теплообмен с окружающей средой, температура которой равна нулю. Начальная температура стержня равна T_0 .

Построить график зависимости температуры стержня от времени в нескольких точках по объему тела.

Исходные данные:

$$l = 1.5\text{ м}; \quad T_0 = 20^0\text{ C}; \quad T_1 = 145^0\text{ C}.$$

ВЫВОДЫ

Построение систем эффективного управления рядом технологических процессов невозможно без учёта пространственной распределённости контролируемых параметров. Поведение подобных объектов управления описывается с помощью аппарата дифференциальных уравнений в частных производных.

Для изучения объектов с распределёнными параметрами, выявления качественных особенностей их поведения используются аналитические решения уравнений математической физики, в частности, уравнения теплопроводности, которые могут быть получены с помощью операторного метода. Алгоритмы расчёта температурных полей могут быть реализованы в среде программирования Matlab, которая содержит удобные и эффективные средства для представления и анализа результатов расчёта.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Учебно-методическое пособие посвящено проблеме построения математических моделей процесса теплопроводности в типовых объектах с учетом пространственной распределённости управляемых величин.

В пособии представлены сведения из теории теплопроводности, необходимые для понимания физической природы изучаемого процесса конвективного теплообмена, приведены методика решения краевых задач и примеры их решения с программной реализацией на языке программирования Matlab.

Данное пособие может быть использовано для моделирования процессов теплопередачи в телах стандартной формы при различных условиях теплообмена на границах тела. Приведенные индивидуальные задания предназначены для самостоятельного решения задач в рамках выполнения студентами контрольной работы.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

ОСНОВНЫЕ ПРАВИЛА И ТЕОРЕМЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

№№ п/п	$f(t)$	$F(p) = L\{f(t)\}$
1	$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(p) e^{pt} dp$	$\int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt = F(p)$
2	$Af(t) + Bg(t)$	$AF(p) + BG(p)$
3	$f'(t)$	$pF(p) - f(+0)$
4	$f^{(n)}(t)$	$p^n F(p) - p^{n-1} f(+0) - p^{n-2} f'(+0) - \dots$ $\dots - f^{(n-1)}(+0)$
5	$e^{at} f(t)$	$F(p-a)$
6	$\frac{1}{a} f\left(\frac{t}{a}\right)$	$F(ap)$
7	$\frac{1}{a} e^{bt} f\left(\frac{t}{a}\right)$	$F(ap-b)$
8	$f(t-b),$ если $f(t) = 0$, при $t < 0$	$e^{-bp} F(p)$
9	$\int_0^t f(\theta) d\theta$	$\frac{1}{p} F(p)$
10	$\int_0^t \int_0^{\theta} f(\vartheta) d\vartheta d\theta$	$\frac{1}{p^2} F(p)$
11	$t f(t)$	$-F'(p)$
12	$t^n f(t)$	$(-1)^n F^{(n)}(p)$
13	$\int_0^t f_1(t-\theta) f_2(\theta) d\theta = f_1 * f_2$	$F_1(p) F_2(p)$
14	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} f(\theta) \exp\left(-\frac{\theta^2}{4t}\right) d\theta$	$\frac{1}{\sqrt{p}} F(\sqrt{p})$

№№ п/п	$f(t)$	$F(p) = L\{f(t)\}$
15	$\int_0^{\infty} e^{-p\theta} f^*(\theta) d\theta,$ <p>где $f^*(\theta) = \int_0^{\infty} f(t) \psi(t, \theta) dt$</p> $\psi(t, \theta)$	$F(\varphi(p)) \Phi(p)$ $e^{-t\varphi(p)} \Phi(p) = \int_0^{\infty} e^{-p\theta} \psi(t, \theta) d\theta$
16	$\sum_{n=1}^N \frac{\Phi(p_n)}{\Psi'(p_n)} e^{p_n t}$	$\frac{\Phi(p)}{\Psi(p)},$ <p>где $\Psi(p) = (p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_N)$</p>
17	$\sum_{k=1}^n \frac{1}{(k-1)!} \times$ $\times \lim_{p \rightarrow p_n} \left(\frac{d^{k-1}}{dp^{k-1}} \left[\frac{\Phi(p)(p - p_n)^k}{\Psi(p)} e^{pt} \right] \right)$ <p>(случай кратных корней)</p>	$\frac{\Phi(p)}{\Psi(p)},$ <p>где $\Psi(p) = (p - p_1)(p - p_2) \dots$ $\dots (p - p_m)^k (p - p_{m+1}) \dots (p - p_n)$</p>

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

ИЗОБРАЖЕНИЯ ПО ЛАПЛАСУ НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИЙ

№№ п/п	Изображение функции $F(p) = L\{f(t)\}$	Оригинал функции $f(t)$
1	$\frac{1}{p}$	1
2	$\frac{1}{p^2}$	t
3	$\frac{1}{p^n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$
4	$\frac{1}{\sqrt{p}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$
5	$p^{-3/2}$	$2\sqrt{\frac{t}{\pi}}$
6	$p^{-(n+\frac{1}{2})} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$	$\frac{2^n t^{n-\frac{1}{2}}}{[1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)]\sqrt{\pi}}$
7	$\frac{\Gamma(m)}{p^m} \quad (m > 0)$	t^{m-1}
8	$\frac{\Gamma(m+1)}{p^{m+1}} = \frac{\Pi(m)}{p^{m+1}} \quad (m > -1)$	t^m
9	$\frac{1}{p-a}$	e^{at}
10	$\frac{1}{p+a}$	e^{-at}
11	$\frac{1}{(p-a)^2}$	te^{at}
12	$\frac{1}{(p-a)^n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$	$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{at}$

№№ п/п	Изображение функции $F(p) = L\{f(t)\}$	Оригинал функции $f(t)$
13	$\frac{\Gamma(m)}{(p-a)^m} \quad (m > 0)$	$t^m e^{at}$
14	$\frac{1}{(p-a)(p-b)}$	$\frac{1}{a-b}(e^{at} - e^{bt})$
15	$\frac{p}{(p-a)(p-b)}$	$\frac{1}{a-b}(ae^{at} - be^{bt})$
16	$\frac{1}{(p-a)(p-b)(p-c)}$	$\frac{(b-c)e^{at} + (c-a)e^{bt} + (a-b)e^{ct}}{(a-b)(b-c)(c-a)}$
17	$\frac{k}{p^2 + k^2}$	$\sin kt$
18	$\frac{p}{p^2 + k^2}$	$\cos kt$
19	$\frac{k}{p^2 - k^2}$	$\text{sh } kt$
20	$\frac{p}{p^2 - k^2}$	$\text{ch } kt$
21	$\frac{k}{(p+a)^2 + k^2}$	$e^{-at} \sin kt$
22	$\frac{p+a}{(p+a)^2 + k^2}$	$e^{-at} \cos kt$
23	$\frac{1}{p(p^2 + k^2)}$	$\frac{1}{k^2}(1 - \cos kt)$
24	$\frac{1}{p^2(p^2 + k^2)}$	$\frac{1}{k^3}(kt - \sin kt)$
25	$\frac{1}{(p^2 + k^2)^2}$	$\frac{1}{2k^3}(\sin kt - kt \cos kt)$
26	$\frac{p}{(p^2 + k^2)^2}$	$\frac{t}{2k} \sin kt$
27	$\frac{p^2}{(p^2 + k^2)^2}$	$\frac{1}{2k}(\sin kt + kt \cos kt)$

№№ п/п	Изображение функции $F(p) = L\{f(t)\}$	Оригинал функции $f(t)$
28	$\frac{p^2 - k^2}{(p^2 + k^2)^2}$	$t \cos kt$
29	$\frac{p}{(p^2 + a^2)(p^2 + b^2)} \quad (a^2 \neq b^2)$	$\frac{\cos at - \cos bt}{b^2 - a^2}$
30	$\frac{1}{(p - a)^2 + k^2}$	$\frac{1}{k} e^{at} \sin kt$
31	$\frac{3k^2}{p^2 + k^3}$	$e^{-kt} - e^{\frac{kt}{2}} \left(\cos \frac{kt\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} \sin \frac{kt\sqrt{3}}{2} \right)$
32	$\frac{4k^3}{p^4 + 4k^4}$	$\sin kt \operatorname{ch} kt - \cos kt \operatorname{sh} kt$
33	$\frac{p}{p^4 + 4k^4}$	$\frac{1}{2k^2} \sin kt \operatorname{sh} kt$
34	$\frac{1}{p^4 - k^4}$	$\frac{1}{2k^3} (\operatorname{sh} kt - \sin kt)$
35	$\frac{p}{p^4 - k^4}$	$\frac{1}{2k^2} (\operatorname{ch} kt - \cos kt)$
36	$\frac{p^n}{(p^2 + k^2)^{n+1}}$	$\frac{t^n \sin kt}{2^n kn!}$
37	$\frac{1}{p} \left(\frac{p-1}{p} \right)^n$	$l_n(t) = \frac{1}{n!} e^t \frac{d^n}{dt^n} (t^n e^{-t})$
38	$\frac{p}{(p-k)^{\frac{3}{2}}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{kt} (1 + 2kt)$
39	$(\sqrt{p-a} - \sqrt{p-b})$	$\frac{1}{2\sqrt{\pi t^3}} (e^{bt} - e^{at})$
40	$\frac{1}{\sqrt{p+k}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} - k e^{k^2 t} \operatorname{erfc} k\sqrt{t}$
41	$\frac{\sqrt{p}}{p-k^2}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} - k e^{k^2 t} \operatorname{erf} k\sqrt{t}$
42	$\frac{\sqrt{p}}{p+k^2}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} - \frac{2k}{\sqrt{\pi}} e^{-k^2 t} \int_0^{k\sqrt{t}} e^{x^2} dx$

№№ п/п	Изображение функции $F(p) = L\{f(t)\}$	Оригинал функции $f(t)$
43	$\frac{1}{\sqrt{p}(p-k^2)}$	$\frac{1}{k}e^{-k^2t} \operatorname{erf} k\sqrt{t}$
44	$\frac{1}{\sqrt{p}(p^2+k^2)}$	$\frac{2}{k\sqrt{\pi}}e^{-k^2t} \int_0^{k\sqrt{t}} e^{-x^2} dx$
45	$\frac{b^2-a^2}{(p-a^2)(b+\sqrt{p})}$	$e^{a^2t} [b - a \operatorname{erf} a\sqrt{t}] - be^{b^2t} \operatorname{erfc} b\sqrt{t}$
46	$\frac{1}{\sqrt{p}(\sqrt{p}+k)}$	$e^{k^2t} \operatorname{erfc} k\sqrt{t}$
47	$\frac{1}{(p+k)(\sqrt{p}+b)}$	$\frac{1}{\sqrt{b-k}}e^{-kt} \operatorname{erf} \sqrt{(b-k)t}$
48	$\frac{b^2-k^2}{\sqrt{p}(p-k^2)(\sqrt{p}+b)}$	$e^{k^2t} \left[\frac{b}{k} \operatorname{erf} k\sqrt{t} - 1 \right] + e^{b^2t} \operatorname{erfc} b\sqrt{t}$
49	$e^{-k\sqrt{p}} \quad (k \geq 0)$	$\frac{k}{2\sqrt{\pi t^3}} e^{-\frac{k^2}{4t}}$
50	$\frac{1}{p} e^{-k\sqrt{p}} \quad (k \geq 0)$	$\left[1 - \operatorname{erf} \frac{k}{2\sqrt{t}} \right] = \operatorname{erfc} \frac{k}{2\sqrt{t}}$
51	$\frac{1}{\sqrt{p}} e^{-k\sqrt{p}} \quad (k \geq 0)$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{k^2}{4t}}$
52	$\frac{1}{p\sqrt{p}} e^{-k\sqrt{p}} \quad (k \geq 0)$	$2\sqrt{t} i \operatorname{erfc} \frac{k}{2\sqrt{t}} =$ $= 2\sqrt{\frac{t}{p}} e^{-\frac{k^2}{4t}} - k \operatorname{erfc} \frac{k}{2\sqrt{t}}$
53	$\frac{1}{p^2} e^{-k\sqrt{p}}$	$2\sqrt{t} i^2 \operatorname{erfc} \frac{k}{2\sqrt{t}} =$ $= \left(t + \frac{k^2}{2} \right) \operatorname{erfc} \frac{k}{2\sqrt{t}} - k\sqrt{\frac{t}{p}} e^{-\frac{k^2}{4t}}$
54	$\frac{1}{p\sqrt{p^n}} e^{-k\sqrt{p}} \quad (k \geq 0)$	$(4t)^{\frac{n}{2}} i^n \operatorname{erfc} \frac{k}{2\sqrt{t}}$
55	$\frac{1}{p^n \sqrt{p}} e^{-2\sqrt{kp}} \quad (k \geq 0)$	$\frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-z)^{n-1} e^{-\frac{k}{z}} \frac{dz}{\sqrt{\pi z}}$

№№ п/п	Изображение функции $F(p) = L\{f(t)\}$	Оригинал функции $f(t)$
56	$\frac{be^{-k\sqrt{p}}}{p(b+\sqrt{p})} \quad (k \geq 0)$	$\operatorname{erfc} \frac{k}{2\sqrt{t}} - e^{bk} e^{b^2 t} \operatorname{erfc} \left(b\sqrt{t} + \frac{k}{2\sqrt{t}} \right)$
57	$\frac{e^{-k\sqrt{p}}}{\sqrt{p}(b+\sqrt{p})} \quad (k \geq 0)$	$e^{bk} e^{b^2 t} \operatorname{erfc} \left(b\sqrt{t} + \frac{k}{2\sqrt{t}} \right)$
58	$\frac{1}{\left(1 + \sqrt{\frac{p}{b}}\right)} e^{-k\sqrt{p}}$	$\sqrt{\frac{b}{\pi t}} e^{-\frac{k^2}{4t}} - b e^{k\sqrt{b} + bt} \operatorname{erfc} \left(\frac{k}{2\sqrt{t}} + \sqrt{bt} \right)$
59	$\frac{1}{p\sqrt{p}(\sqrt{p}+b)} e^{-k\sqrt{p}}$	$\frac{2}{b} \sqrt{\frac{t}{\pi}} e^{-\frac{k^2}{4t}} - \frac{1+bk}{b^2} \operatorname{erfc} \frac{k}{2\sqrt{t}} +$ $+ \frac{1}{b^2} e^{bk+b^2 t} \operatorname{erfc} \left(\frac{k}{2\sqrt{t}} + b\sqrt{t} \right)$
60	$\frac{1}{(\sqrt{p})^{n+1}(\sqrt{p}+b)} e^{-k\sqrt{p}}$	$\frac{1}{(-b)^n} e^{bk+b^2 t} \operatorname{erfc} \left(\frac{k}{2\sqrt{t}} + b\sqrt{t} \right) -$ $- \frac{1}{(-b)^n} \sum_{m=0}^{n-1} (-2b\sqrt{t})^m i^m \operatorname{erfc} \frac{k}{2\sqrt{t}}$
61	$\frac{1}{(\sqrt{p}+b)^2} e^{-k\sqrt{p}}$	$-2b\sqrt{\frac{t}{\pi}} e^{-\frac{k^2}{4t}} +$ $+ (1+bk+2b^2 k) e^{bk+b^2 t} \operatorname{erfc} \left(\frac{k}{2\sqrt{t}} + b\sqrt{t} \right)$
62	$\frac{1}{p(\sqrt{p}+b)^2} e^{-k\sqrt{p}}$	$\frac{1}{b^2} \operatorname{erfc} \frac{k}{2\sqrt{t}} - \frac{2}{b} \sqrt{\frac{t}{\pi}} e^{-\frac{k^2}{4t}} -$ $- \frac{1}{b^2} (1-bk-2b^2 k) e^{bk+b^2 t} \operatorname{erfc} \left(\frac{k}{2\sqrt{t}} + b\sqrt{t} \right)$
63	$\frac{1}{(p-b)} e^{-k\sqrt{p}}$	$\frac{1}{2} e^{bt} \left\{ e^{-\frac{k}{\sqrt{b}}} \operatorname{erfc} \left(\frac{k}{2\sqrt{t}} - \sqrt{bt} \right) + \right.$ $\left. + e^{\frac{k}{\sqrt{b}}} \operatorname{erfc} \left(\frac{k}{2\sqrt{t}} + \sqrt{bt} \right) \right\}$
64	$\frac{\prod \left(\frac{1}{2} n \right)}{p^{2+\frac{1}{2}n}} e^{-k\sqrt{p}}$	$\frac{t^{1+\frac{1}{2}n}}{1+\frac{1}{2}n} \prod \left(1 + \frac{1}{2} n \right) 2^{n+2} i^{n+2} \operatorname{erfc} \frac{k}{2\sqrt{t}}$
65	$\frac{1}{p^{\frac{3}{4}}} e^{-k\sqrt{p}}$	$\frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{k}{2t}} e^{-\frac{k^2}{8t}} K_{\frac{1}{4}} \left(\frac{k^2}{8t} \right)$

№№ п/п	Изображение функции $F(p) = L\{f(t)\}$	Оригинал функции $f(t)$
66	$\frac{1}{p} e^{-k\sqrt{p+b}}$	$\frac{1}{2} \left\{ e^{-k\sqrt{b}} \operatorname{erfc}\left(\frac{k}{2\sqrt{t}} - \sqrt{bt}\right) + e^{k\sqrt{b}} \operatorname{erfc}\left(\frac{k}{2\sqrt{t}} + \sqrt{bt}\right) \right\}$
67	$\frac{1}{p} \sqrt{p+2b} e^{-k\sqrt{p+2b}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\left(\frac{k^2}{4t} + 2bt\right)\right) + \frac{\sqrt{2b}}{2} \left\{ e^{-k\sqrt{2b}} \operatorname{erfc}\left(\frac{k}{2\sqrt{t}} - \sqrt{2bt}\right) - e^{k\sqrt{2b}} \operatorname{erfc}\left(\frac{k}{2\sqrt{t}} + \sqrt{2bt}\right) \right\}$
68	$\frac{1}{p\sqrt{p+2b}} e^{-k\sqrt{p+2b}}$	$\frac{1}{2\sqrt{2b}} \left\{ e^{-k\sqrt{2b}} \operatorname{erfc}\left(\frac{k}{2\sqrt{t}} - \sqrt{2bt}\right) - e^{k\sqrt{2b}} \operatorname{erfc}\left(\frac{k}{2\sqrt{t}} + \sqrt{2bt}\right) \right\}$
69	$\frac{1}{\sqrt{p}} e^{-\frac{k}{p}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \cos(2\sqrt{kt})$
70	$\frac{1}{\sqrt{p}} e^{\frac{k}{p}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \operatorname{ch}(2\sqrt{kt})$
71	$\frac{1}{p\sqrt{p}} e^{-\frac{k}{p}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi k}} \sin(2\sqrt{kt})$
72	$\frac{1}{p\sqrt{p}} e^{\frac{k}{p}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi k}} \operatorname{sh}(2\sqrt{kt})$
73	$e^{k^2 p^2} \operatorname{erfc} kp \quad (k > 0)$	$\frac{1}{k\sqrt{\pi}} e^{-\frac{t^2}{4k}}$
74	$\frac{1}{p} e^{k^2 p^2} \operatorname{erfc} kp \quad (k > 0)$	$\operatorname{erf} \frac{t}{2k}$
75	$e^{kp} \operatorname{erfc} \sqrt{kp} \quad (k > 0)$	$\frac{\sqrt{k}}{\pi\sqrt{t}(t+k)}$
76	$\frac{1}{\sqrt{p}} \operatorname{erfc} \sqrt{kp}$	$\begin{cases} 0, & \text{при } 0 < t < k \\ (\pi t)^{-\frac{1}{2}}, & \text{при } t > k \end{cases}$

№№ п/п	Изображение функции $F(p) = L\{f(t)\}$	Оригинал функции $f(t)$
77	$\frac{1}{\sqrt{p}} e^{kp} \operatorname{erfc} \sqrt{kp} \quad (k > 0)$	$\frac{1}{\sqrt{\pi(t+k)}}$
78	$\operatorname{erfc} \frac{k}{\sqrt{p}}$	$\frac{1}{\pi t} \sin(2k\sqrt{t})$
79	$\frac{1}{\sqrt{p}} e^{\frac{k^2}{p}} \operatorname{erfc} \frac{k}{\sqrt{p}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-2k\sqrt{t}}$
80	$\frac{1}{kp\sqrt{p}} \operatorname{th} k\sqrt{p}$	$1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{(2n-1)^2 \pi^2} \exp\left(-\frac{(2n-1)^2 \pi^2 t}{4k^2}\right)$

РАЗЛОЖЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В РЯД

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots, |x| < \infty;$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots, |x| < \infty;$$

$$\operatorname{th} x = 1 - 2e^{-2x} + 2e^{-4x} - 2e^{-6x} + \dots, |x| < \infty;$$

$$\operatorname{cth} x = 1 + 2e^{-2x} + 2e^{-4x} + 2e^{-6x} + \dots, |x| < \infty;$$

$$\frac{1}{\operatorname{sh} x} = 2(e^{-x} + e^{-3x} + e^{-5x} + \dots), |x| < \infty;$$

$$\frac{1}{\operatorname{ch} x} = 2(e^{-x} - e^{-3x} + e^{-5x} - e^{-7x} + \dots), |x| < \infty.$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Лыков А.В. Теория теплопроводности. – М.: Высшая школа, 1967.
2. Карташов Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. – М.: Высшая школа, 2001.
3. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. – М.: Наука, 1970.
4. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1966.
5. Бутковский А.Г. Методы управления системами с распределенными параметрами. – М.: Наука, 1975.
6. Рапопорт Э.Я. Структурное моделирование объектов и систем управления с распределёнными параметрами. – М.: Высшая школа, 2003.
7. Бутковский А.Г. Структурная теория распределённых систем. – М.: Наука, 1977.
8. Бутковский А.Г. Характеристики систем с распределёнными параметрами. – М.: Наука, 1979.
9. Рей У. Методы управления технологическими процессами. – М.: Мир, 1983.
10. Рапопорт Э.Я. Оптимизация процессов индукционного нагрева металла. – М.: Metallurgia, 1993.
11. Снеддон И. Преобразования Фурье. – М.: Издательство иностранной литературы, 1955.
12. Мартыненко Н.А., Пустыльников Л.М. Конечные интегральные преобразования и их применение к исследованию систем с распределёнными параметрами. – М.: Наука, 1985.
13. Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и z-преобразования. – М.: Наука, 1971.
14. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001.

15. Евграфов М.А. Аналитические функции: Учебное пособие для вузов. – 3е изд., перераб. и доп. – М.: Гл. ред. физ.-мат. лит., 1991.

16. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. Т.2. – М.: Наука, 1985.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие.....	3
Введение.....	3
1. Общие сведения об объектах с распределенными параметрами.....	5
1.1. Принципиальные особенности объектов с распределенными параметрами.....	5
1.2. Типовые объекты с распределенными параметрами второго порядка, описываемые уравнением нестационарной теплопроводности.....	6
1.3. Граничные условия.....	11
Вопросы для самоконтроля.....	17
2. Моделирование объектов с распределенными параметрами второго порядка.....	18
2.1. Методика моделирования объектов с распределенными параметрами.....	18
2.2. Примеры построения моделей объектов с распределенными параметрами.....	22
Вопросы для самоконтроля.....	46
3. Варианты заданий к контрольной работе.....	47
Выводы.....	51
Заключение.....	52
Приложение 1. Основные правила и теоремы преобразования Лапласа.....	53
Приложение 2. Изображения по Лапласу некоторых функций.....	55
Приложение 3. Разложения гиперболических функций в ряд.....	62
Библиографический список.....	63

Учебное издание

*ДИЛИГЕНСКАЯ Анна Николаевна
ДАНИЛУШКИН Иван Александрович*

**Математическое моделирование
систем с распределенными параметрами**

Редактор *Е.В. Абрамова*

Подп. в печать 12.11.12
Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная
Усл. п.л. 3,8. Уч.-изд. л. 3,75
Тираж 50 экз. Рег. № 190/12

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«Самарский государственный технический университет»
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244. Главный корпус

Отпечатано в типографии Самарского
государственного технического университета
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244. Корпус № 8